Série A,
N° d'ordre : 55

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE CAEN

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Éliane BLANCHETON

1re *THÈSE* — LES ÉQUATIONS AUX VARIATIONS DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE.

2e *THÈSE* — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 26 juin 1962 devant la Commission d'examen.

M. R. CAMPBELL,	Professeur à l'Université de Caen,	*Président.*
M. A. LICHNÉROWICZ,	Professeur au Collège de France	*Examinateurs.*
M. R. PALLU de LA BARRIÈRE,	Professeur à l'Université de Caen	
Mme Y. BRUHAT,	Professeur à la Sorbonne	

CHARTRES
IMPRIMERIE DURAND
9, RUE FULBERT, 9

1962

Série A,
d'ordre : 55

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE CAEN

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Éliane BLANCHETON

1re *THÈSE.* — LES ÉQUATIONS AUX VARIATIONS DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE.

2e *THÈSE.* — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 26 juin 1962 devant la Commission d'examen.

M. R. CAMPBELL,	Professeur à l'Université de Caen,	*Président.*
M. A. LICHNÉROWICZ,	Professeur au Collège de France	*Examinateurs.*
M. R. PALLU de LA BARRIÈRE,	Professeur à l'Université de Caen	
Mme Y. BRUHAT,	Professeur à la Sorbonne	

CHARTRES
IMPRIMERIE DURAND
9, RUE FULBERT, 9

1962

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE CAEN

Doyen (Chimie)	MM. LOZAC'H
Secrétaire Principal	CAUCAL

PROFESSEURS

Géologie	MM. DANGEARD
Physique Général	SCHERER
Calcul Différentiel et Intégral	APERY
Microbiologie	JACQUET
Zoologie	BOCQUET (Assesseur)
Physique	COLOMBANI
Chimie	Mme WALTER-LÉVY
Botanique	MM. PITOT
Mécanique rationnelle	CAMPBELL
Chimie	BACHELET
Mathématiques	MALLIAVIN
Chimie	VIALLE
Physique	COJAN
Mathématiques	PALLU DE LA BARRIÈRE
—	PHAM
Physique	GIACOMO
Zoologie	REY
Minéralogie	MONIER
Chimie	CONIA
Géologie	PAREYN
Botanique	BINET (sans chaire)

MAITRES DE CONFÉRENCES

Chimie	MM. ROMANET
Biologie Végétale	DOGUET
Physique	CABANNES
Physiologie Animale	RYBAK
Physique	MABBOUX-STROMBERG
Mathématiques	GIRAULT
Chimie	SCHAAL
Mathématiques	NATAF
Électronique	THUREAU
Mathématiques	GEFFROY
Physique	BARRAT
Chimie	BERNARD
Physique	LEGROS
Chimie	GAULT
Physique	SALMON
Biologie	Mlle DEMEUSY
Chimie	MM. MOLLIER
—	PINAZZI
Physique	GRAF
Microbiologie	KAUFFMANN
Physique	Mme CONNES

A MA MÈRE

A MA SŒUR

Alger, Mathématiques.
Tome IX, 1962.

Éliane BLANCHETON

LES ÉQUATIONS AUX VARIATIONS DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

INTRODUCTION

Le cadre géométrique de la théorie d'Einstein de la relativité générale est une variété riemanienne V_4, de dimension 4, munie d'une métrique $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ (α, $\beta = 0, 1, 2, 3$). Les coefficients de cette métrique sont supposés vérifier un système d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations classiques de Laplace et de Poisson. Il s'écrit

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}.$$

Le tenseur $S_{\alpha\beta}$, ou tenseur d'Einstein, s'exprime en fonction du tenseur de Ricci de la variété; le tenseur $T_{\alpha\beta}$, ou tenseur impulsion énergie, décrit la distribution énergétique au point considéré; χ est une constante universelle.

On connaît depuis longtemps des solutions particulières de ce système : la solution de SCHARZSCHILD, correspondant au champ de gravitation d'une sphère matérielle homogène, les solutions proposées respectivement par Einstein et par DE Sitter définissant l'une et l'autre des modèles d'univers homogènes et isotropes sont les premières connues. Depuis, bien d'autres solutions ont été proposées (Friedmann, Gödel, Mac Vittie...).

Dans un autre ordre d'idées, A. Lichnérowicz a établi un certain nombre de théorèmes globaux concernant les espace-temps stationnaires : il a démontré en particulier l'impossibilité de construire un modèle d'univers stationnaire, à section d'espace compacte orientable,

ceci en l'absence de constante cosmologique, ainsi que la nécessité de singularités préfigurant les tubes massiques. Dans le cas général, étant donné la complexité des équations, on ne connaît que peu de résultats globaux. Aussi a-t-il semblé intéressant de pouvoir étudier des solutions « voisines » des solutions particulières connues. L'outil mathématique adéquat a été introduit par G. Darboux sous le nom de système associé à un système donné relativement à une de ses solutions. Il a été utilisé systématiquement par H. Poincaré dans l'étude des problèmes de dynamique céleste sous le nom d'équations aux variations.

Les équations aux variations peuvent se définir de la façon suivante : soit

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{F}(x,\ t)$$

un système différentiel, où x est une inconnue vectorielle, t une variable scalaire, et F une fonction différentiable par rapport à x quel que soit t, et quel que soit x dans un ouvert D. Soit $x = f_0(t)$ une solution particulière de ce système contenue dans D. On fait le changement d'inconnue

$$x = f_0(t) + y.$$

La nouvelle inconnue y satisfait un système de la forme

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{L}(t)y + \varphi\|y\|$$

où

$$\mathrm{L}(t) = \mathrm{F}'_x(f_0(t),\ t)$$

et $\|\varphi\| \to 0$ lorsque $\|y\| \to 0$.

On appelle système d'équations aux variations associé au système donné et à la solution $x = f_0(t)$ le système linéaire

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{L}(t)y.$$

La nouvelle variable y, que nous désignerons aussi par δx, est la variation de la variable x.

Le système des équations aux variations associé à un système d'équations aux dérivées partielles se définit de façon identique.

Nous nous proposons de former les équations aux variations associées aux équations de la relativité générale et relatives à une solution particulière arbitraire de ces équations. Nous étudierons

plus spécialement les espaces-temps voisins des espaces-temps stationnaires, c'est-à-dire les équations aux variations associées à une solution particulière stationnaire.

De nombreuses études ont été faites, certaines par Einstein lui-même, pour étudier des espaces-temps voisins d'un espace-temps euclidien. Il ne semble pas qu'on se soit préoccupé jusqu'à présent d'étudier systématiquement les solutions voisines d'une solution donnée non euclidienne.

Dans le premier chapitre, nous formons les équations aux variations de la relativité générale dans le cas extérieur. Elles s'écrivent

$$[\Delta \underline{\gamma}]_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha Y_\beta + \nabla_\beta Y_\alpha = -k\gamma_{\alpha\beta}$$

où $\underline{\gamma}$ est le tenseur de composantes $\gamma_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta}$, et où Δ est un opérateur différentiel linéaire du second ordre. Les Y_α sont les composantes d'un vecteur qui ne dépend que des coordonnées choisies : on peut en particulier faire un changement de coordonnées $x \to x + \delta x$, tel que le vecteur Y_α soit identiquement nul.

Qu'il me soit permis ici de signaler que A. Lichnérowicz a montré que l'opérateur Δ obtenu plus haut généralise au mieux le laplacien défini par G. de Rham sur les formes différentielles. Dès lors, les équations aux variations obtenues sont formellement identiques aux équations du champ électromagnétique, le vecteur Y_α jouant le rôle de jauge gravitationnelle. C'est cette remarque, faite par A. Lichnérowicz, qui lui a permis de développer sa très belle théorie de la quantification en relativité générale, parallèlement à la quantification du champ électromagnétique.

Dans le deuxième chapitre, nous formons les équations aux variations de la relativité générale dans le cas intérieur. Suivant le plan adopté par A. Lichnérowicz dans son livre « théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme », et avec les mêmes méthodes, nous étudions le problème de Cauchy posé par ces équations. Le vecteur Y_α s'introduit comme plus haut, et présente le même arbitraire. Les multiplicités exceptionnelles sont identiques à celles de la solution particulière considérée lorsque cette dernière est une solution correspondant à un schéma intérieur. Si au contraire on étudie les équations aux variations associées à une solution du problème extérieur, les variétés exceptionnelles sont d'une part les hypersurfaces caractéristiques, partout tangentes au cône caractéristique de la solution extérieure initiale, d'autre part les lignes de courant, et, dans le cas d'un fluide parfait, l'extention relativiste

des fronts d'onde de l'hydrodynamique classique relatives à la solution variée. L'étude de ce problème de CAUCHY, lorsqu'on l'applique au prolongement du champ de gravitation de l'intérieur vers l'extérieur ou inversement, met en évidence des conditions de raccordement semblables à celles obtenues par A. Lichnérowicz dans le cas général : l'hypersurface de séparation doit être engendrée par les lignes de courant et la pression s'y annule. Le prolongement de l'intérieur vers l'extérieur est physiquement unique (le seul arbitraire provient du choix du vecteur Y_α).

Ces résultats se généralisent immédiatement à la théorie pentadimensionnelle de Jordan-Thiry.

Nous avons également démontré dans ce deuxième chapitre un théorème relatif au schéma champ électromagnétique : Si la solution initiale correspond à un état de radiation totale pure, au sens de A. Lichnérowicz, on peut associer à la solution perturbée un état de radiation totale généralisée au sens de L. Bel.

Le troisième et le quatrième chapitre sont consacrés à l'étude des espaces-temps voisins d'un espace-temps stationnaire. Le premier paragraphe du troisième chapitre rappelle la notion d'espace-temps stationnaire, variété admettant un groupe d'isométries globales à un paramètre, ainsi que les résultats obtenus par Y. Thiry concernant l'expression du tenseur de courbure d'un espace-temps stationnaire en fonction d'éléments définis sur une section d'espace W_3, ou sur l'espace quotient de la variété donnée par la relation d'équivalence définie par le groupe d'isométries.

Nous avons alors étendu aux espaces-temps voisins d'un espace-temps stationnaire les théorèmes, démontrés par A. Lichnérowicz dans le cas stationnaire, dont nous avons rappelé l'énoncé au début de cette introduction. L'extension de ces théorèmes repose sur le fait que la composante de la variation $\delta(S_0^0)$ du tenseur d'Einstein en repère naturel adapté à l'isométrie est, en tout point où l'espace-temps stationnaire initial est extérieur, proportionnelle à la divergence d'un vecteur de W_3, alors que la composante correspondante T_0^0 du tenseur impulsion-énergie en un tel point est strictement positive en présence de matière.

Dans le quatrième chapitre, nous remarquons que les équations d'Einstein peuvent être déduites d'un principe variationnel. Ce principe, partiellement donné par Einstein lui-même, a été établi dans toute sa généralité par J. M. Souriau. Le lagrangien ne dépend pas explicitement des coordonnées x^α. On en déduit que le système

aux variations (au sens de Poincaré) linéaire associé au système des équations d'Einstein et à une de ses solutions stationnaires donnée dérive lui-aussi d'un principe variationnel, dont le lagrangien, quadratique, ne dépend pas de la variable x^0. Il en résulte un théorème de conservation analogue, par son origine, au théorème de l'énergie cinétique en mécanique.

Dans le cas très particulier où l'espace-temps initial est statique au sens de Levi-Civita, et où le coefficient de $(dx^0)^2$ dans l'expression du ds^2 est égal à un, le système des équations aux variations est particulièrement simple. La méthode qui conduisait plus haut au théorème de conservation permet ici de mettre le premier membre du système sous la forme $\frac{d}{dt}\int_{W_3} U \, vol$, où vol est l'élément de volume de la section d'espace W_3, U une quantité strictement positive. On peut en déduire un théorème de stabilité, le mot stabilité étant pris ici dans un sens très voisin de celui donné par Liapounoff pour les systèmes différentiels ordinaires : il suffit de substituer dans la définition de Liapounoff une norme hilbertienne à l'une des normes usuelles des vecteurs de R^n.

Nous démontrons ainsi l'instabilité de l'univers d'Einstein, l'instabilité trouvée n'étant d'ailleurs pas la même que celle déjà connue concernant cet univers. On sait en effet que le ds^2 définissant l'univers en expension de Friedmann,

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \frac{e^{g(t)}}{\left(1 + \frac{r^2}{4R_0^2}\right)^2}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]$$

$$(r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \qquad R_0 = C^{te})$$

admet pour cas particulier le ds^2 définissant l'univers d'Einstein, qui correspond à $g(t) = C^{te}$. L'un et l'autre sont des solutions des équations d'Einstein avec second membre, la matière étant supposée spacialement homogène et isotrope. La fonction g satisfait une équation différentielle ordinaire, à laquelle on peut appliquer les méthodes de la mécanique : on trouve que la solution $g(t) = C^{te}$ est instable. Autrement dit si, partant d'un univers d'Einstein de rayon R, homogène, on suppose qu'à l'instant t_0, R se met à croître (resp. à décroître), l'espace restant homogène, R continuera à croître (resp. à décroître) indéfiniment.

Nous obtenons dans ce travail un résultat différent. L'espace correspondant à la métrique perturbée n'est plus supposé homogène.

Si la matière est schématisée sous forme de matière pure, on obtient même un théorème local : la variation de la densité de matière croît (ou décroît) exponentiellement en fonction du temps le long d'une ligne de temps, à moins qu'elle ne soit identiquement nulle.

Il m'est agréable d'exprimer ici ma respectueuse reconnaissance à Monsieur A. Lichnérowicz. Après m'avoir suggéré d'entreprendre ce travail, il n'a cessé de me prodiguer ses conseils et ses encouragements, dans des circonstances souvent difficiles, et il m'est impossible d'exprimer tout ce que je lui dois, aussi bien sur le plan intellectuel que sur le plan moral.

Je tiens aussi à exprimer mes sincères remerciements à Messieurs R. Pallu de la Barrière, J. M. Souriau et Y. Thiry qui m'ont initiée à la recherche mathématique et ont suivi avec beaucoup de sympathie mes recherches.

Je prie Madame A. Tonnelat et Madame Y. Bruhat de trouver ici mes remerciements pour l'intérêt qu'elles ont porté à mes travaux.

Je remercie enfin Monsieur Campbell d'avoir accepté de présider le jury.

CHAPITRE PREMIER

LES ÉQUATIONS AUX VARIATIONS DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE DANS LE CAS EXTÉRIEUR

En relativité générale, l'élément primitif est constitué par une variété « espace-temps » V_4, de dimension 4, munie d'une structure de variété différentiable de classe C^2, C^4 par morceaux. Sur V_4 est définie une métrique riemannienne ds^2, de type hyperbolique normal, à un carré positif et trois carrés négatifs. L'expression d'une telle métrique dans un système de coordonnées admissible est

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{1-1}$$

où α, β et tout indice grec $= 0, 1, 2, 3$, et où $x \in V_4$.

Le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ est supposé de classe C^1, C^3 par morceaux.

On désignera par

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left[\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\gamma}\right]$$

et

$$\Gamma_{\alpha\ \gamma}^{\ \beta} = g^{\beta\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda\gamma}$$

les coefficients de la connexion riemannienne associée à la métrique ds^2, par ∇ l'opérateur de dérivation covariante correspondant; $R^{\lambda}{}_{\mu,\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}$ et $S_{\alpha\beta}$ désigneront respectivement le tenseur de courbure et les tenseurs de Ricci et d'Einstein de la métrique.

Les équations de la relativité générale dans le cas extérieur s'écrivent :

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} k g_{\alpha\beta}, \tag{1-2}$$

où k est la constante cosmologique. Nous nous proposons dans ce chapitre de former les équations aux variations (au sens de Poincaré)

associées au système (1-2), d'étudier l'influence d'un changement de variables sur les équations obtenues, et de résoudre le problème de Cauchy correspondant.

I. Formation des équations aux variations associées au système (1-2).

On désigne par

$$\delta(g_{\alpha\beta}) = \gamma_{\alpha\beta}$$

la variation du tenseur métrique.

L'abaissement et le relèvement des indices des tenseurs introduits se fera toujours à l'aide de la métrique ds^2; nous écrirons donc

$$\gamma_\alpha^\beta = g^{\beta\lambda}\gamma_{\alpha\lambda}, \qquad \gamma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\lambda}g^{\beta\mu}\gamma_{\lambda\mu}.$$

On a :

$$g_{\alpha\lambda}g^{\lambda\beta} = \delta_\alpha^\beta \quad (\delta_\alpha^\beta = 1 \text{ si } \alpha = \beta,\ \delta_\alpha^\beta = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta)$$

d'où par variation

$$\delta(g_{\alpha\lambda})g^{\lambda\beta} + g_{\alpha\lambda}\,\delta(g^{\lambda\beta}) = 0.$$

On en déduit :

$$\delta(g^{\lambda\beta}) = -\gamma^{\lambda\beta}.$$

On a ensuite successivement :

$$\delta(\Gamma_{\alpha\beta\lambda}) = \frac{1}{2}[\partial_\alpha\gamma_{\beta\lambda} + \partial_\lambda\gamma_{\alpha\beta} - \partial_\beta\gamma_{\alpha\lambda}]$$

et

$$\delta(\Gamma_{\alpha\ \lambda}^{\ \beta}) = \frac{1}{2}g^{\beta\mu}[\partial_\alpha\gamma_{\mu\lambda} + \partial_\lambda\gamma_{\alpha\mu} - \partial_\mu\gamma_{\alpha\lambda}] - \gamma^{\beta\mu}\Gamma_{\alpha\mu\lambda}.$$

Le calcul est fait localement. Il est donc possible de supposer les coordonnées choisies de telle sorte que les coefficients de la connexion soient nuls au point considéré. On a dans cette hypothèse

$$\partial_\alpha = \nabla_\alpha$$

et

$$\text{(1-3)} \qquad \delta(\Gamma_{\alpha\ \lambda}^{\ \beta}) = \frac{1}{2}[\nabla_\alpha\gamma_\lambda^\beta + \nabla_\lambda\gamma_\alpha^\beta - \nabla^\beta\gamma_{\alpha\lambda}].$$

On a posé

$$\nabla^\beta = g^{\beta\mu}\nabla_\mu.$$

Les deux membres de (1-3) sont des tenseurs. Par suite, l'expression trouvée est indépendante des coordonnées choisies.

De

$$R^{\mu}{}_{\lambda,\,\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma_\beta{}^{\mu}{}_{\lambda} - \partial_\beta \Gamma_\alpha{}^{\mu}{}_{\lambda} + \Gamma_\alpha{}^{\mu}{}_{\rho}\Gamma_\beta{}^{\rho}{}_{\lambda} - \Gamma_\beta{}^{\mu}{}_{\rho}\Gamma_\alpha{}^{\rho}{}_{\lambda}$$

on déduit immédiatement, en supposant encore les coordonnées choisies de telle sorte que les $\Gamma_\alpha{}^{\lambda}{}_{\beta}$ soient nuls au point considéré,

$$\delta(R^{\mu}{}_{\lambda,\,\alpha\beta}) = \nabla_\alpha(\delta\Gamma_\beta{}^{\mu}{}_{\lambda}) - \nabla_\beta(\delta\Gamma_\alpha{}^{\mu}{}_{\lambda})$$

Le résultat, mis sous forme tensorielle, est en fait ici encore valable quelles que soient les coordonnées choisies. Il vient, en explicitant les $\delta\Gamma_\alpha{}^{\lambda}{}_{\beta}$:

$$\delta(R^{\mu}{}_{\lambda,\,\alpha\beta}) = \frac{1}{2}[\nabla_\alpha(\nabla_\beta\gamma^{\mu}_{\lambda} + \nabla_\lambda\gamma^{\mu}_{\beta} - \nabla^{\mu}\gamma_{\beta\lambda}) - \nabla_\beta(\nabla_\alpha\gamma^{\mu}_{\lambda} + \nabla_\lambda\gamma^{\mu}_{\alpha} - \nabla^{\mu}\gamma_{\alpha\lambda})].$$

Par contraction, on en déduit :

$$\delta(R_{\alpha\beta}) = \delta(R^{\lambda}{}_{\alpha,\,\lambda\beta})$$
$$= \frac{1}{2}[\nabla_\lambda(\nabla_\beta\gamma^{\lambda}_{\alpha} + \nabla_\alpha\gamma^{\lambda}_{\beta} - \nabla^{\lambda}\gamma_{\alpha\beta}) - \nabla_\beta(\nabla_\lambda\gamma^{\lambda}_{\alpha} + \nabla_\alpha\gamma^{\lambda}_{\lambda} - \nabla^{\lambda}\gamma_{\alpha\lambda})].$$

Mais, d'après l'identité de Ricci :

$$\nabla_\lambda(\nabla_\beta\gamma^{\lambda}_{\alpha}) = \nabla_\beta(\nabla_\lambda\gamma^{\lambda}_{\alpha}) + R_{\beta\lambda}\gamma^{\lambda}_{\alpha} - R^{\rho}{}_{\alpha,\,\lambda\beta}\gamma_{\rho\lambda}$$

Donc

$$\delta(R_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{2}\Big[\nabla_\lambda\nabla^{\lambda}\gamma_{\alpha\beta} - R_\beta{}^{\rho}\gamma_{\rho\alpha} - R_\alpha{}^{\rho}\gamma_{\rho\beta} + 2R^{\rho}{}_{\alpha,\,\lambda\beta}\gamma_{\rho\lambda}$$
$$- \nabla_\beta\Big(\nabla_\lambda\gamma^{\lambda}_{\alpha} - \frac{1}{2}\nabla_\alpha\gamma^{\lambda}_{\lambda}\Big) - \nabla_\alpha\Big(\nabla_\lambda\gamma^{\lambda}_{\beta} - \frac{1}{2}\nabla_\beta\gamma^{\lambda}_{\lambda}\Big)\Big].$$

Nous poserons :

(1-4) $\qquad \gamma = \gamma^{\lambda}_{\lambda}, \qquad \Gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\gamma, \qquad Y_\alpha = \nabla_\lambda\Gamma^{\lambda}_{\alpha}.$

Il vient :

(1-5)

$$\delta(R_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{2}[\nabla_\lambda\nabla^{\lambda}\gamma_{\alpha\beta} - R_{\alpha\rho}\gamma^{\rho}_{\beta} - R_{\rho\beta}\gamma^{\rho}_{\alpha} + 2R^{\rho}{}_{\alpha,\,\lambda\beta}\gamma_{\rho\lambda} - \nabla_\beta Y_\alpha - \nabla_\alpha Y_\beta].$$

A. Lichnérowicz a introduit l'opérateur laplacien généralisé, noté Δ, défini sur les tenseurs d'ordre p par l'équation

$$(\Delta T)_{\alpha_1 \dots \alpha} = -\nabla^{p}\nabla_{p}T_{\alpha_1 \dots \alpha} + \sum_{k} R_{\alpha_k\mu}T_{\alpha_1 \dots}{}^{\mu} \dots {}_{\alpha_p}$$
$$- \sum_{k,\,l,\,k\neq l} R_{\alpha_k\rho,\,\alpha_l\sigma}T_{\alpha_1 \dots \rho \dots \sigma \dots \alpha}$$

(dans $T_{\alpha_1 \ldots \mu \ldots \alpha_p}$, μ occupe la k-ième place, dans $T_{\alpha_1 \ldots \rho \ldots \sigma \ldots \alpha_p}$, ρ et σ occupent respectivement la k-ième et la l-ième place). En particulier, pour un tenseur $T_{\alpha\beta}$ d'ordre 2, symétrique, on a :

$$(\Delta T)_{\alpha\beta} = -\nabla_\lambda \nabla^\lambda T_{\alpha\beta} + R_{\rho\alpha} T^\rho{}_\beta + R_{\rho\beta} T^\rho{}_\alpha - 2R_{\alpha\rho,\beta\sigma} T^{\rho\sigma}.$$

L'équation (1-5) s'écrit, avec cette notation, et en désignant par γ le tenseur de composantes covariantes $\gamma_{\alpha\beta}$

$$\text{(1-6)} \qquad \boxed{\delta(R_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}[(\Delta \underline{\gamma})_{\alpha\beta} + \nabla_\beta Y_\alpha + \nabla_\alpha Y_\beta]}$$

Le système aux variations associé à (1-2) s'écrit donc

$$\text{(1-7)} \qquad (\Delta \underline{\gamma})_{\alpha\beta} + \nabla_\beta Y_\alpha + \nabla_\alpha Y_\beta = -k\gamma_{\alpha\beta}.$$

Nous calculerons également ici la variation du tenseur $S_{\alpha\beta}$ qui nous sera utile plus loin. Par variation de l'équation

$$R_\alpha{}^\beta = g^{\beta\lambda} R_{\alpha\lambda},$$

il vient :
$$\delta(R_\alpha^\beta) = g^{\beta\lambda}\, \delta(R_{\alpha\lambda}) - R_{\alpha\lambda}\gamma^{\beta\lambda},$$

et par contraction :

$$\delta R = g^{\alpha\lambda}\, \delta(R_{\alpha\lambda}) - R_{\alpha\lambda}\gamma^{\alpha\lambda}.$$

Tenant compte de (1-6), on a :

$$\delta(R_\alpha^\beta) = \frac{1}{2} g^{\beta\gamma}[(\Delta \underline{\gamma})_{\alpha\lambda} + \nabla_\lambda Y_\alpha + \nabla_\alpha Y_\lambda] - R_{\alpha\lambda}\gamma^{\beta\lambda}$$

et
$$\delta R = \frac{1}{2}[\Delta\gamma + 2\nabla_\lambda Y^\lambda] - R_{\alpha\lambda}\gamma^{\alpha\lambda}.$$

Puis, en désignant par $\underline{\Gamma}$ le tenseur de composantes $\Gamma_{\alpha\beta}$, et par Γ le scalaire Γ^λ_λ,

$$\delta(S_\alpha^\beta) = \delta\left[R_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta(R + k)\right]$$

donne

$$\text{(1-8)} \quad \delta(S_\alpha^\beta) = \frac{1}{2}\Big[(\Delta \underline{\Gamma})_\alpha^\beta - 2R_{\alpha\lambda}\Gamma^{\beta\lambda} + \delta_\alpha^\beta R_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho\lambda} + \left(S_\beta^\alpha + \frac{1}{2}k\delta_\alpha^\beta\right)\Gamma + \nabla_\alpha Y^\beta + \nabla^\beta Y_\alpha - \delta_\alpha^\beta \nabla_\lambda Y^\lambda\Big]$$

ou, en explicitant l'opérateur Δ

$$\text{(1-9)} \quad \delta(S_\alpha^\beta) = \frac{1}{2}\Big[-\nabla_\lambda \nabla^\lambda \Gamma_\alpha^\beta + R^{\beta\lambda}\Gamma_{\lambda\alpha} - R_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda\beta} - 2R_{\rho\alpha,\lambda}{}^\beta \Gamma^{\rho\lambda} + \delta_\alpha^\beta R_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho\lambda} + \left(S_\alpha^\beta + \frac{1}{2}k\delta_\alpha^\beta\right)\Gamma + \nabla^\beta Y_\alpha + \nabla_\alpha Y^\beta - \delta_\alpha^\beta \nabla_\lambda Y^\lambda\Big].$$

II. Influence d'un changement de variables.

On considère la variété différentiable V_4 munie cette fois de la métrique

$$(1\text{-}10) \qquad \overline{ds^2} = [g_{\alpha\beta}(x) + [\delta(g_{\alpha\beta})](x)]\, dx^\alpha\, dx^\beta,$$

et on fait le changement de variables défini par

$$x \to x + \delta x.$$

Il vient

$$(1\text{-}11) \quad \overline{ds^2} = [g_{\alpha\beta}(x + \delta x) + \delta(g_{\alpha\beta})\,(x + \delta x)]\, d(x^\alpha + \delta x^\alpha)\, d(x^\beta + \delta x^\beta).$$

Nous poserons

$$\delta x^\alpha = \varphi^\alpha(x).$$

On a d'après la formule de Taylor

$$g_{\alpha\beta}(x + \delta x) = g_{\alpha\beta}(x) + \varphi^\mu(x)\, \partial_\mu g_{\alpha\beta}(x) + o(\varphi^\mu)$$

et

$$d(\delta x^\alpha) = \partial_\mu \varphi^\alpha\, dx^\mu.$$

On développe alors l'équation (1-11) en se limitant aux variations premières

$$\overline{ds^2} = [g_{\alpha\beta}(x) + \gamma_{\alpha\beta}(x) + \varphi^\lambda(x)\, \partial_\lambda g_{\alpha\beta}(x) + g_{\alpha\lambda}(x)\, \partial_\beta \varphi^\lambda(x) + g_{\beta\lambda}(x)\, \partial_\alpha \varphi^\lambda(x)]\, dx^\alpha\, dx^\beta + o(\varphi^\mu).$$

Par rapport aux nouvelles variables, on a donc :

$$\overline{ds^2} = [g_{\alpha\beta}(x) + \gamma'_{\alpha\beta}(x)]\, dx^\alpha\, dx^\beta + o(\varphi^\mu)$$

où on a posé

$$\gamma'_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + g_{\alpha\lambda}\, \partial_\beta \varphi^\lambda + g_{\beta\lambda}\, \partial_\alpha \varphi^\lambda + \varphi^\lambda\, \partial_\lambda g_{\alpha\beta}$$

Cette expression se simplifie. En effet si

$$\varphi_\alpha = g_{\alpha\lambda} \varphi^\lambda$$

elle s'écrit :

$$\gamma'_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + \partial_\beta \varphi_\alpha + \partial_\alpha \varphi_\beta - \varphi^\lambda [\partial_\beta g_{\alpha\lambda} + \partial_\alpha g_{\beta\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta}$$

c'est-à-dire

$$\gamma'_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + \nabla_\beta \varphi_\alpha + \nabla_\alpha \varphi_\beta.$$

On a ensuite, en contractant, et avec des notations évidentes

$$\gamma' = \gamma + 2 \nabla_\lambda \varphi^\lambda.$$

Puis

$$\Gamma'_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta} + \nabla_\beta \varphi_\alpha + \nabla_\alpha \varphi_\beta - g_{\alpha\beta} \nabla_\lambda \varphi^\lambda.$$

Enfin

$$Y'_\alpha = \nabla_\lambda \Gamma'^\lambda_\alpha = Y_\alpha + \nabla_\lambda (\nabla^\lambda \varphi_\alpha) + \nabla_\lambda (\nabla_\alpha \varphi^\lambda) - \nabla_\alpha (\nabla_\lambda \varphi^\lambda).$$

On peut appliquer l'identité de Ricci aux deux derniers termes

$$\nabla_\lambda (\nabla_\alpha \varphi^\lambda) - \nabla_\alpha (\nabla_\lambda \varphi^\lambda) = R_{\rho\alpha} \varphi^\rho$$

on obtient alors

$$Y'_\alpha = Y_\alpha + \nabla_\lambda (\nabla^\lambda \varphi_\alpha) + R_{\rho\alpha} \varphi^\rho.$$

Les Y_α étant supposés connus, il est donc possible d'avoir $Y'_\alpha = 0$: on choisit pour φ_α quatre solutions indépendantes du système :

$$\nabla_\lambda (\nabla^\lambda \varphi_\alpha) + R^\rho{}_\alpha \varphi_\rho + Y_\alpha = 0$$

ce qui est possible, localement du moins, d'après les travaux de M^me^ Bruhat. Par suite, moyennant un changement de variables, on peut toujours écrire les équations (1-7) sous la forme :

$$\begin{cases} [\Delta \underline{\gamma}]_{\alpha\beta} + k \gamma_{\alpha\beta} = 0, \\ \nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha = 0. \end{cases}$$

III. Problème de Cauchy relatif au système (1-7).

Au voisinage d'une hypersurface S, d'équation $x^0 = 0$, partout orientée dans l'espace, le système (1-7) est manifestement équivalent au système :

$$\begin{cases} E^\beta_\alpha = [\Delta \underline{\Gamma}]^\beta_\alpha + \nabla_\alpha Y^\beta + \nabla^\beta Y_\alpha - \delta^\beta_\alpha \nabla_\lambda Y^\lambda + k \Gamma^\beta_\alpha = 0, \\ Y_\alpha = \nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha. \end{cases}$$

En raison de la symétrie des $\Gamma_{\alpha\beta}$, ce système est lui-même équivalent à :

$$\begin{array}{ll} (1\text{-}12) & \left\{ \begin{array}{l} E^0_\alpha = |\Delta \underline{\Gamma}|^0_\alpha + \nabla_\alpha Y^0 + \nabla^0 Y_\alpha - \delta^0_\alpha \nabla_\lambda Y^\lambda + k \Gamma^0_\alpha = 0, \\ E^i_j = |\Delta \underline{\Gamma}|^i_j + \nabla_j Y^i + \nabla^i Y_j - \delta^i_j \nabla_\lambda Y^\lambda + k \Gamma^i_j = 0, \\ Y_\alpha = \nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha \end{array} \right. \\ (1\text{-}13) & \\ (1\text{-}14) & \end{array}$$

(i, j et tout indice latin = 1, 2, 3).

Supposons donnés sur S les Γ^λ_μ et leurs dérivées premières. Ces données constituent ce que nous appellerons les données de Cauchy. (1-14) montre que les Y_α sont connus sur S. D'autre part, (1-12) et (1-14) entraînent :

$$(1\text{-}15) \quad |\nabla \underline{\Gamma}|^0_\alpha + \nabla_\alpha (\nabla_\lambda \Gamma^{\lambda 0}) + \nabla^0 (\nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha) - \delta^0_\alpha \nabla_\lambda (\nabla_\rho \Gamma^{\rho\lambda}) + k \Gamma^0_\alpha = 0.$$

On vérifie que le premier membre de cette équation ne contient aucune dérivée d'indice 2 (on rappelle que l'indice d'une dérivée est le nombre de fois où l'indice o figure sous le symbole ∂). Par suite, les quatre équations (1-15) fournissent quatre conditions qui doivent nécessairement être vérifiées par les données de Cauchy, ce que nous supposerons dans la suite.

Supposons données, au voisinage de S quatre fonctions Y_α satisfaisant sur S les conditions

$$Y_\alpha = \nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha.$$

Le système (E) constitué par les équations (1-12) et (1-13) dans lesquelles on a remplacé Y_α par les fonctions données, admet une solution unique (Γ^λ_μ) correspondant aux données de Cauchy choisies.

Nous nous proposons de montrer que (1-14) est vérifiée dans un voisinage de S. Nous poserons :

$$Z_\alpha = \nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha - Y_\alpha$$

où les Y_α sont les fonctions données et où les Γ^λ_μ sont solutions du système (E) considéré plus haut. Sur S, on a :

$$Z_\alpha = 0$$

(1-12) s'écrit :

$$(\Delta\Gamma)^0_\alpha + \nabla_\alpha(\nabla_\lambda \Gamma^{\lambda 0} - Z^0) + \nabla^0(\nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha - Z_\alpha) - \delta^0_\alpha \nabla_\lambda(\nabla_\mu \Gamma^{\lambda\mu} - Z^\lambda) + k\Gamma^0_\alpha = 0$$

ou, en groupant autrement les termes,

$$\left[[\Delta\Gamma]^0_\alpha + \nabla_\alpha \nabla_\lambda \Gamma^{\lambda 0} + \nabla^0 \nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha - \delta^0_\alpha \nabla_\lambda \nabla_\mu \Gamma^{\lambda\mu} + k\Gamma^0_\alpha\right] - \nabla_\alpha Z^0 - \nabla^0 Z_\alpha + \delta^0_\alpha \nabla_\lambda Z^\lambda = 0.$$

Sur S, la quantité entre crochets est nulle d'après (1-15). Il reste :

$$\nabla_\alpha Z^0 + \nabla^0 Z_\alpha - \delta^0_\alpha \nabla_\lambda Z^\lambda = 0.$$

Pour $\alpha = i$, l'équation se réduit à

$$\nabla_i Z^0 + \nabla^0 Z_i = 0.$$

Compte-tenu du fait que, sur S, Z_α et $\nabla_i Z_\alpha$ sont nuls, il reste

$$\partial_0 Z_i = 0.$$

Pour $\alpha = 0$, on a

$$\nabla^0 Z_0 - \nabla_i Z^i = 0$$

qui entraîne

$$\partial_0 Z_0 = 0.$$

Au total, sur S, on a :

$$Z_\alpha = 0, \qquad \delta_0 Z_\alpha = 0.$$

D'autre part, le système (E) étant supposé vérifié, on a :

$$\nabla_\lambda E^\lambda_\alpha = 0.$$

Calculons à part $\nabla_\lambda(\Delta\underline{\Gamma})^\lambda_\alpha$, et pour commencer $\nabla_\lambda(\nabla_\rho \nabla^\rho \Gamma^\lambda_\alpha)$. L'identité de Ricci, appliquée deux fois de suite entraîne

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda(\nabla_\rho \nabla^\rho \Gamma^\lambda_\alpha) &= \nabla_\rho(\nabla_\lambda \nabla^\rho \Gamma^\lambda_\alpha) + R_{\alpha\mu,\lambda\rho} \nabla^\rho \Gamma^{\lambda\mu} \\ &= \nabla_\rho(\nabla^\rho \nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha + R_\alpha{}^\mu{}_{,\lambda}{}^\rho \Gamma^\lambda_\mu + R_\mu{}^\rho \Gamma^\mu_\alpha) + R_\alpha{}^\mu{}_{,\lambda\rho} \nabla^\rho \Gamma^\lambda_\mu\end{aligned}$$

et par suite :

$$\begin{aligned}(1\text{-}16)\quad \nabla_\lambda(\nabla_\rho \nabla^\rho \Gamma^\lambda_\alpha) &= \nabla_\rho \nabla^\rho(\nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha) + 2R_\alpha{}^\mu{}_{,\lambda}{}^\rho \nabla_\rho \Gamma^\lambda_\mu + R_\lambda{}^\rho \nabla_\rho \Gamma^\mu_\alpha \\ &\quad + \nabla_\rho R_\alpha{}^\mu{}_{,\lambda}{}^\rho \Gamma^\lambda_\mu + \nabla_\rho R_\mu{}^\rho \Gamma_\alpha{}^\mu.\end{aligned}$$

On en déduit, d'après (1-6) et (1-16) :

$$(1\text{-}17)\quad \nabla_\lambda(\nabla\Gamma)^\lambda_\alpha = -\nabla_\rho \nabla^\rho(\nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha) + R^\rho_\alpha \nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\mu + [\nabla_\rho R_\alpha{}^\mu{}_{,\lambda}{}^\rho + \nabla_\lambda R^\mu_\alpha]\Gamma^\lambda_\mu.$$

D'autre part, on a :

$$(1\text{-}18)\quad \nabla_\lambda[\nabla_\alpha Y^\lambda + \nabla^\lambda Y_\alpha - \delta^\lambda_\alpha \nabla_\rho Y^\rho] = \nabla_\lambda \nabla^\lambda Y_\alpha + \nabla_\lambda \nabla_\alpha Y^\lambda - \nabla_\alpha \nabla_\lambda Y^\lambda.$$

L'identité de Ricci s'applique aux deux derniers termes

$$\nabla_\lambda \nabla_\alpha Y^\lambda - \nabla_\alpha \nabla_\lambda Y^\lambda = R_{\alpha\rho} Y^\rho.$$

Au total :

$$\begin{aligned}(1\text{-}19)\quad \nabla_\lambda E^\lambda_\alpha \equiv{}& -\nabla_\rho \nabla^\rho(\nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha - Y_\alpha) \\ &+ R^\rho_\alpha \nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\rho + [\nabla_\rho R_\alpha{}^\mu{}_{,\lambda}{}^\rho + \nabla_\lambda R^\mu_\alpha]\Gamma^\lambda_\mu + R^\rho_\alpha Y_\rho + k \nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha = 0.\end{aligned}$$

Or les identités de Bianchi s'écrivent :

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta,\mu\nu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta,\nu\lambda} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0.$$

Par contraction de β et de ν, il vient :

$$(1\text{-}20)\qquad \nabla_\lambda R_{\alpha\mu} - \nabla_\mu R_{\alpha\lambda} + \nabla_\nu R_\alpha{}^\nu{}_{,\lambda\mu} = 0.$$

Tenons compte maintenant de (1-2). On a :

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\mu} = 0$$

donc

$$\nabla_\nu R^\nu{}_{\alpha,\lambda\mu} = 0$$

(1-19) se simplifie alors et s'écrit :

$$\nabla_\lambda E^\lambda_\alpha \equiv -\nabla_\rho \nabla^\rho(\nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha - Y_\alpha) + \frac{1}{2} k(\nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha - Y_\alpha) = 0$$

ou

$$- \nabla_\varrho \nabla^\varrho Z_\alpha + \frac{1}{2} k Z_\alpha = 0.$$

Mais on a sur S, $Z_\alpha = 0$, et $\partial_0 Z_\alpha = 0$. Par suite, $Z_\alpha = 0$ dans un voisinage de S.

En particulier si les données de Cauchy ont été choisies de telle sorte que $Y_\alpha = \nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha = 0$ sur S, la solution du système

$$\nabla \underset{1}{\gamma} + k \underset{1}{\gamma} = 0$$

vérifiera

$$\nabla_\lambda \Gamma^\lambda_\alpha = 0$$

dans un voisinage de S.

CHAPITRE II

LES ÉQUATIONS AUX VARIATIONS DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE DANS LE CAS INTÉRIEUR

En présence de distributions énergétiques, Einstein a été conduit à écrire les équations de la relativité générale sous la forme

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \tag{2-1}$$

χ est un facteur constant positif, $T_{\alpha\beta}$ un tenseur symétrique, appelé le tenseur impulsion-énergie, qui décrit au mieux, au point considéré de V_4, la distribution énergétique. Il est conservatif :

$$\nabla_\beta T^\beta_\alpha = 0. \tag{2-2}$$

Dans un premier paragraphe, nous étudierons les schémas « matière pure » et « fluide parfait ». Pour ces deux schémas, on suppose que le tenseur $T_{\alpha\beta}$ admet un vecteur propre réel, orienté dans le temps. Nous appellerons ce vecteur, supposé normé, le vecteur vitesse unitaire du schéma considéré et noterons ses composantes u_α. On a

$$g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1. \tag{2-3}$$

La valeur propre associée, supposée positive, est interprétée classiquement comme la densité du fluide.

Le schéma est dit matière pure si le tenseur d'énergie admet les valeurs propres

$$s_0 = \rho > 0, \qquad s_i = 0.$$

Le schéma est dit fluide parfait s'il admet les valeurs propres

$$s_0 = \rho > 0, \qquad s_1 = s_2 = s_3 = p > 0.$$

Pour ces deux schémas, on a

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}. \tag{2-4}$$

Dans le premier cas, on a

$$p = 0,$$

dans le second p et ρ sont liés par l'équation d'état du fluide, que nous écrirons

$$\rho = \varphi(p). \tag{2-5}$$

Dans un second paragraphe, nous étudierons le schéma dit champ électromagnétique singulier, dans lequel le tenseur impulsion énergie est de la forme

$$T_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta$$

où τ est un scalaire, l_α un vecteur isotrope.

Enfin, nous généraliserons nos résultats à la théorie unitaire de Jordan-Thiry.

I. Schéma matière pure et fluide parfait.

Prenons le tenseur impulsion-énergie sous la forme

$$T_{\alpha\beta} = r u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} \tag{2-7}$$

où u_α est le vecteur vitesse unitaire, $r = \rho + p$ un scalaire positif.

En différentiant (2-3), on a

$$g^{\alpha\beta} u_\alpha \nabla_\lambda u_\beta = 0. \tag{2-8}$$

Les conditions de conservation s'écrivent

$$\nabla_\beta T^\beta_\alpha = \nabla_\beta (r u_\alpha u^\beta - p \delta^\beta_\alpha) = 0.$$

En effectuant la dérivation, il vient

$$u_\alpha \nabla_\beta (r u^\beta) + r u^\beta \nabla_\beta u_\alpha - \partial_\alpha p = 0. \tag{2-9}$$

La multiplication contractée par u^α entraîne

$$\nabla_\alpha (r u^\alpha) - u^\alpha \partial_\alpha p = 0. \tag{2-10}$$

Tenant compte de cette relation dans (2-9), on obtient

$$r u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = (\delta^\beta_\alpha - u_\alpha u^\beta) \partial_\beta p. \tag{2-11}$$

1. Formation des équations aux variations.

Nous allons écrire les équations variées associées aux équations (2-7), (2-3), (2-10) et (2-11). Nous poserons

$$\delta(u_\alpha) = v_\alpha, \qquad \delta\rho = \rho_1, \qquad \delta p = p_1.$$

Tout d'abord, par variation de (2-7) on a

$$(2\text{-}12)\quad \delta(T_{\alpha\beta}) = r_1 u_\alpha u_\beta + r(u_\alpha v_\beta + u_\beta v_\alpha) - p_1 g_{\alpha\beta} - p\gamma_{\alpha\beta}.$$

On en déduit

$$\delta(T_\alpha^\beta) = \delta(g^{\beta\lambda}T_{\lambda\alpha}) = g^{\beta\lambda}\delta(T_{\lambda\alpha}) - \gamma^{\beta\lambda}T_{\lambda\alpha}.$$

Tous calculs faits, on a

$$(2\text{-}12)\quad \delta(T_\alpha^\beta) = r_1 u_\alpha u^\beta + r(u_\alpha v^\beta + u^\beta v_\alpha - u_\alpha u_\lambda \gamma^{\alpha\lambda}) - p_1 \delta_\alpha^\beta.$$

Par variation de (2-3), il vient

$$(2\text{-}13)\qquad -\gamma^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta + 2u_\alpha v^\alpha = 0$$

par variation de (2-10)

$$\nabla_\alpha(rv^\alpha + r_1 u^\alpha) - \gamma^{\alpha\beta}\nabla_\alpha(ru_\beta) - \delta\Gamma_\alpha^{\ \lambda}{}_\beta g^{\alpha\beta} r u_\lambda - u^\alpha \partial_\alpha p_1 - v^\alpha \partial_\alpha p + \gamma^{\alpha\beta}u_\beta \partial_\alpha p = 0$$

ce qui s'écrit encore, en explicitant le $\delta\Gamma$

$$(2\text{-}14)\quad \nabla_\alpha(rv^\alpha + r_1 u^\alpha) - u^\alpha \partial_\alpha p_1 - ru^\alpha Y_\alpha - \gamma^{\alpha\beta}[\nabla_\alpha(ru_\beta) - u_\beta \partial_\alpha p] - v^\alpha \partial_\alpha p = 0.$$

Par variation de (2-11), il vient

$$r_1 u^\beta \nabla_\beta u_\alpha + rv^\beta \nabla_\beta u_\alpha - r\gamma^{\lambda\beta}u_\lambda \nabla_\beta u_\alpha - ru^\beta \delta\Gamma_\beta^{\ \lambda}{}_\alpha u_\lambda + ru^\beta \nabla_\beta v_\alpha + (u_\alpha u^\beta - \delta_\alpha^\beta)\partial_\beta p_1 + (u_\alpha v^\beta + v_\alpha u^\beta - \gamma^{\beta\lambda}u_\alpha u_\lambda)\partial_\beta p = 0,$$

qui donne, en explicitant le $\delta\Gamma$ et en ordonnant

$$(2\text{-}15)\quad ru^\beta \nabla_\beta v_\alpha + (u_\alpha u^\beta - \delta_\alpha^\beta)\partial_\beta p_1 - \frac{1}{2} ru^\beta u^\lambda \nabla_\alpha \gamma_{\beta\lambda} + r_1 u^\beta \nabla_\beta u_\alpha + v_\beta(r\nabla^\beta u_\alpha + u_\alpha \partial^\beta p + \delta_\alpha^\beta u^\lambda \partial_\lambda p) - u_\lambda \gamma^{\lambda\beta}(r\nabla_\beta u_\alpha + u_\alpha \partial_\beta p) = 0.$$

Enfin, l'équation d'état, dans l'hypothèse d'un schéma fluide parfait, donne par variation

$$(2\text{-}16)\qquad \rho_1 = \varphi'(p)\, p_1,$$

avec, bien sûr

$$\delta\rho = \rho_1$$

et

$$\rho_1 = r_1 - p_1.$$

Les équations aux variations de la relativité, que nous écrirons

$$\delta(S_\alpha^\beta) = \chi\delta(T_\alpha^\beta)$$

se présenterons sous deux formes différentes suivant que, au point étudié de V_4, r est différent de zéro ou égal à zéro (dans ce dernier cas, on a aussi $p = 0$).

Premier cas : $r \neq 0$.

Le vecteur vitesse unitaire u est alors donné. Les inconnues sont d'une part les Γ^{β}_{α}; d'autre part; les v_α et ρ_1 (p_1 étant nul ou immédiatement donné par (2-16).

Deuxième cas : $r = 0$.

Les v_α disparaissent des équations; cette fois, ce sont les u_α qui doivent être pris comme inconnues en plus des Γ^{β}_{α} et de ρ_1.

2. Problème de Cauchy.

Position du problème. — Sur une hypersurface S, d'équation $x^0 = 0$, partout orientée dans l'espace, on donne les Γ^{λ}_{μ} et leurs dérivées premières. Nous nous proposons de déterminer, dans un voisinage de S les inconnues, à savoir les Γ^{μ}_{λ} d'une part, ρ_1 et v_α (resp. u_α) d'autre part. Ces inconnues sont supposé satisfaire :

1) Les équations d'Einstein, qui s'écrivent en développant

$$\text{(2-17)}\quad \frac{1}{2}\left((\nabla\Gamma)^{\beta}_{\alpha} - 2R_{\alpha\lambda}\Gamma^{\beta\lambda} + \delta^{\beta}_{\alpha}R_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda\mu} + \left(S^{\beta}_{\alpha} + \frac{1}{2}k\delta^{\beta}_{\alpha}\right)\Gamma + \nabla_\alpha Y^\beta + \nabla^\beta Y_\alpha - \delta^{\beta}_{\alpha}\nabla_\lambda Y^\lambda\right) = \chi(r_1 u_\alpha u^\beta + r(u_\alpha v^\beta + u^\beta v_\alpha - u_\alpha u_\lambda \gamma^{\beta\lambda}) - p_1\delta^{\beta}_{\alpha}).$$

$$\text{(2-18)}\qquad Y_\alpha = \nabla_\lambda \Gamma^{\lambda}_{\alpha};$$

2) Les équations de conservation, c'est-à-dire le système des équations (2-13), (2-14), (2-15);

3) L'équation $p_1 = 0$ si le schéma étudié est un schéma matière pure, l'équation (2-16) si c'est un schéma fluide parfait.

Pour résoudre ce problème, nous commencerons par déterminer sur S les valeurs de ρ_1 et de v_α (resp. u_α). Puis, les données de Cauchy étant supposées convenablement choisies, nous montrerons que, comme dans le cas extérieur, on peut choisir arbitrairement quatre fonctions Y_α, astreintes seulement à vérifier (2-18) sur S. Le système composé des équations (2-17), (2-14), (2-15) admet dans ces conditions une solution unique. On démontre alors que les équations (2-18) et (2-13), supposées vérifiées sur S, le sont dans un voisinage de S.

Détermination des valeurs prises sur S *par* ρ_1 *et* v_α. — Dans ce paragraphe, Y_α est remplacé par $\nabla_\lambda\Gamma^{\lambda}_{\alpha}$ dans les équations (2-17) :

a) Dans le premier cas ($r \neq 0$).

On a d'après (2-17), et en posant

$$\chi A_\lambda = \delta(S^0_\lambda) + \chi r u_\alpha u_\lambda \gamma^{0\lambda}$$

$$\text{(2-19)}\qquad A_\alpha = r_1 u_\alpha u^0 - p_1\delta^0_\alpha + r(u_\alpha v^0 + u^0 v_\alpha).$$

La multiplication contractée par u^α donne

$$u^\alpha A_\alpha = (r_1 - p_1)u^0 + r(v^0 + u^0 u_\alpha v^\alpha).$$

Tenons compte de (2-13)

$$u^\alpha A_\alpha - \frac{1}{2} r u^0 \gamma^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = \rho_1 u^0 + r v^0.$$

Posons encore

$$B = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta.$$

Il vient

$$u^0 \rho_1 = u^\alpha A_\alpha - r u^0 B - r v^0. \qquad (2\text{-}20)$$

Nous remarquons que A_α et B ne dépendent que des données de CAUCHY, et par suite sont connues sur S.

En portant dans (2-19) la valeur de $u^0\rho_1$ obtenue en (2-20), on obtient

$$A_\alpha = (u^\lambda A_\lambda - r u^0 B)u_\alpha + p_1(u^0 u_\alpha - \delta^0_\alpha) + r u^0 v_\alpha. \qquad (2\text{-}21)$$

Pour un schéma matière pure, $p_1 = 0$. Sous la seule condition

$$u^0 \neq 0$$

(2-20) et (2-21) permettent de façon évidente de calculer ρ_1 et v_α sur S.

Pour un schéma fluide parfait, (2-21) et (2-16) entraînent

$$A_\alpha = \rho_1 \left(u_\alpha u^0 + \frac{u_\alpha u^0 - \delta^0_\alpha}{\varphi'(p)} \right) + r(u_\alpha v^0 + u^0 v_\alpha)$$

ou, sous réserve que $u^0 \neq 0$

$$A^\alpha = \frac{1}{u^0} (u^\lambda A_\lambda - r u^0 B - r v^0) \left(u^\alpha u^0 + \frac{u^\alpha u^0 - g^{\alpha 0}}{\varphi'(p)} \right) + r(u^\alpha v^0 + u^0 v^\alpha).$$

En particulier, si $\alpha = 0$,

$$A^0 = \frac{u_\lambda A^\lambda - r u^0 B}{u^0} \left[(u^0)^2 + \frac{(u^0)^2 - g^{00}}{\varphi'(p)} \right] + r v^0 \frac{g^{00} - (u^0)^2(1 - \varphi'(p))}{u^0 \varphi'(p)}.$$

Cette équation permet de calculer v^0 si

$$g^{00} - (u^0)^2(1 - \varphi'(p)) \neq 0. \qquad (2\text{-}22)$$

On calcule alors sans difficultés v^i et ρ_1.

On sait que les variétés satisfaisant à (2-22) sont interprétées comme l'extension relativiste des fronts d'onde en hydrodynamique

classique. Elles doivent donc être orientées dans l'espace, ce qui entraîne

$$\varphi'(p) \geqslant 1.$$

b) Dans le deuxième cas, les équations s'écrivent

$$\begin{cases} \delta(S_\lambda^0) = \chi r_1 u^0 u_\lambda - \chi p_1 \delta_\lambda^0, \\ u_\lambda u^\lambda = 1, \\ p_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \rho_1 = \varphi'(0) p_1. \end{cases}$$

Une étude semblable à celle faite par A. Lichnérowicz montre que ces équations permettent de déterminer u_α et ρ_1 sur S sous réserve que l'on ait

$$\begin{cases} u^0 \neq 0, \\ g^{00} - (u^0)^2(1 - \varphi'(0)) \neq 0. \end{cases}$$

Intégration du système constitué par les équations (2-17), (2-18), (2-14), (2-15), (2-16), ainsi que par l'équation (2-14) (resp. (2-3)).

Comme dans le cas extérieur, nous supposons données sur S quatre fonctions Y_α vérifiant sur S les conditions (2-18). Le système constitué par les équations (2-17), (2-14), (2-15), (2-16), où on a remplacé les Y_α par les fonctions données définies plus haut admet, d'après les travaux de M^me^ Y. Bruhat, une solution et une seule correspondant aux données de Cauchy choisies. (2-18) et (2-13) (resp. (2-3)) sont par hypothèse vérifiées sur S. Nous voulons montrer qu'elles sont en fait vérifiées dans un voisinage de S.

a) Démonstration du fait que (2-18) est vérifiée dans un voisinage de S.

Les équations de conservation, écrites pour le tenseur S donnent

$$\nabla_\beta S_\alpha^\beta = 0.$$

Par variation on en déduit

$$\nabla_\beta \delta(S_\alpha^\beta) + \delta\Gamma_{\beta\lambda}^{\beta} S_\alpha^\lambda - \delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda} S_\lambda^\beta = 0 \tag{2-23}$$

Mais d'après (1-9), (1-17) et (1-18), on a

$$\begin{aligned} 2\nabla_\beta(\delta S_\alpha^\beta) = &- \nabla_\rho \nabla^\rho(\nabla_\lambda \Gamma_\alpha^\lambda - Y_\alpha) - R^\rho{}_\alpha(\nabla_\lambda \Gamma_\rho^\lambda - Y_\rho) + R_{\rho\lambda} \nabla_\alpha \Gamma^{\rho\lambda} \\ &+ S_\alpha^\beta \nabla_\beta \Gamma + \frac{1}{2} k \nabla_\alpha \Gamma + (\nabla_\alpha R_\alpha{}^{\mu,\lambda\rho} - \nabla_\lambda R_{\alpha\mu} + \nabla_\alpha R_{\mu\lambda}) \Gamma^{\mu\lambda}. \end{aligned}$$

L'identité de Ricci contractée montre que le coefficient de $\Gamma^{\mu\lambda}$ est nul. Si nous posons encore

$$\nabla_\lambda \Gamma_\alpha^\lambda - Y_\alpha = Z_\alpha,$$

il reste

$$2\nabla_\beta(\delta S_\alpha^\beta) = -\nabla_\rho\nabla^\rho Z_\alpha - R^\rho{}_\alpha Z_\rho + R_{\rho\lambda}\nabla_\alpha\Gamma^{\rho\lambda} + S_\alpha^\beta\nabla_\beta\Gamma + \frac{1}{2}k\nabla_\alpha\Gamma.$$

D'autre part, on a, en explicitant les $\delta\Gamma$

$$\delta\Gamma_\beta^\beta{}_\lambda S_\alpha^\lambda - \delta\Gamma_\beta^\lambda{}_\alpha S_\lambda^\beta = \frac{1}{2}\nabla_\lambda\gamma S_\alpha^\lambda - \frac{1}{2}\nabla_\alpha\gamma_\beta^\lambda S_\lambda^\beta.$$

On tient compte maintenant de

$$S_\lambda^\beta = R_\lambda^\beta - \frac{1}{2}(R + k)\,\delta_\lambda^\beta$$

et de

$$\gamma_\beta^\lambda = \Gamma_\beta^\lambda - \frac{1}{2}\delta_\beta^\lambda\Gamma, \qquad \gamma = -\Gamma.$$

Il vient

$$\nabla_\alpha\gamma_\beta^\lambda S_\lambda^\beta = \left[\nabla_\alpha\Gamma_\beta^\lambda - \frac{1}{2}\delta_\beta^\lambda\nabla_\alpha\Gamma\right]\left[R_\lambda^\beta - \frac{1}{2}(R + k)\,\delta_\lambda^\beta\right]$$

et en effectuant le deuxième membre

$$\nabla_\alpha\gamma_\beta^\lambda S_\lambda^\beta = R_\lambda^\beta\nabla_\alpha\Gamma_\beta^\lambda + \frac{1}{2}k\nabla_\alpha\Gamma.$$

Au total, (2-23) se réduit à

$$\nabla_\rho\nabla^\rho Z_\alpha + R^\rho{}_\alpha Z_\rho = 0.$$

Or, sur S, $Z_\alpha = 0$ par hypothèse. D'autre part, l'étude des équations

$$\delta S_\alpha^0 = \chi\delta T_\alpha^0$$

montre, par une démonstration semblable à celle faite dans le cas extérieur, que $\partial_0 Z_\alpha = 0$ sur S. Par suite,

$$Z_\alpha \equiv 0.$$

b) Démonstration du fait que (2-13) (resp. (2-3)) sont également vérifiées en dehors de S.

Supposons d'abord $r \neq 0$. Il faut alors vérifier (2-13). De (2-15), il résulte

$$(2\text{-}24)\quad ru^\tau u^\beta\nabla_\beta v_\alpha - \frac{1}{2}ru^\beta u^\lambda u^\alpha\nabla_\alpha\gamma_{\lambda\beta} + v^\beta\partial_\beta p + u^\beta u_\lambda v_\beta\partial_\lambda p - u_\lambda\gamma^{\lambda\beta}\partial_\beta p = 0.$$

Or, si nous posons

$$w = -\gamma^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta + 2u_\alpha v^\alpha,$$

par différentiation et multiplication contractée par u^λ, il vient :

$$u^\lambda \nabla_\lambda w = - u^\lambda u_\alpha u_\beta \nabla_\lambda \gamma^{\alpha\beta} - 2u_\beta \gamma^{\alpha\beta} u^\lambda \nabla_\lambda u_\alpha + 2u^\lambda u_\alpha \nabla_\lambda v^\alpha + 2u^\lambda v_\alpha \nabla_\lambda u^\alpha.$$

Tenant compte de (2-11), il vient

$$ru^\lambda \nabla_\lambda w = - ru^\lambda u_\alpha u_\beta \nabla_\lambda \gamma^{\alpha\beta} - 2u_\beta \gamma^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\lambda - u_\alpha u^\lambda) \partial_\lambda p + 2ru^\lambda u_\alpha \nabla_\lambda v^\alpha + v_\alpha (\delta_\alpha^\lambda - u_\alpha u^\lambda) \partial_\lambda p.$$

On en déduit de façon immédiate, en faisant apparaître la quantité (2-24)

$$ru^\lambda \nabla_\lambda w = - ru^\lambda u_\alpha u_\beta \nabla_\lambda \gamma^{\alpha\beta} + 2ru^\alpha u^\beta \nabla_\beta v_\alpha + 2v^\beta \partial_\beta p + 2u^\beta u^\lambda v_\beta \partial_\lambda p - 2u_\lambda \gamma^{\lambda\beta} \partial_\beta p + 2u_\alpha u_\beta u^\lambda \gamma^{\alpha\beta} \partial_\lambda p - 4u^\beta u^\lambda v_\beta \partial_\lambda p.$$

Par suite, w satisfait l'équation différentielle

$$ru^\lambda \nabla_\lambda w + 2u^\lambda w \partial_\lambda p = 0,$$

avec la condition initiale $w = 0$ sur S. Dans un schéma matière pure, il vient

$$u^\lambda \nabla_\lambda w = 0.$$

Dans un schéma fluide parfait, l'équation précédente peut s'écrire, lorsqu'on tient compte de (2-10)

$$ru^\lambda \nabla_\lambda w + 2w \nabla_\lambda (ru^\lambda) = 0$$

ou

$$\nabla_\lambda (ru^\lambda \sqrt{|w|}) = 0.$$

Dans les deux cas, on en déduit sans peine que, si la surface S n'est pas engendrée par les lignes de courant (c'est-à-dire par les trajectoires du vecteur u_α), alors w est nul dans un voisinage de S.

Remarquons que, lorsque S est supposée définie par l'équation $x^0 = 0$, l'hypothèse faite est équivalente à $u^0 \neq 0$.

Si nous supposons maintenant $r = 0$, les équations (2-14) et (2-15) se réduisent à

$$\begin{cases} \nabla_\alpha (r_1 u^\alpha) = u^\alpha \partial_\alpha p_1, \\ r_1 u^\beta \nabla_\beta u_\alpha + (u_\alpha u^\beta - \delta_\alpha^\beta) \partial_\beta p_1 = 0. \end{cases}$$

Si on multiplie la seconde équation par u^α, il vient

$$r_1 u^\beta u^\alpha \nabla_\beta u_\alpha + u^\alpha u_\alpha u^\beta \partial_\beta p_1 - u^\beta \partial_\beta p_1 = 0.$$

Tenons compte de la première, et posons

$$u^\alpha u_\alpha - 1 = w.$$

On a alors $w = 0$ sur S et

$$\frac{1}{2} r_1 u^\beta \nabla_\beta w + w \nabla_\beta (r_1 u^\beta) = 0.$$

dans un voisinage de S.

On en déduit, comme plus haut que w est nul dans un voisinage de S, toujours sous réserve que S ne soit pas engendrée par les lignes de courant.

3. Prolongement local.

Nous rappelons d'abord les conditions de raccordement classiquement adoptées : chaque masse gravitante de l'espace-temps V_4 engendre un tube d'univers limité par une hypersurface S. D'un côté de S, il existe une métrique satisfaisant aux équations d'Einstein du cas intérieur (l'un des deux nombres r et r_1 au moins est différent de 0). De l'autre côté, il existe une métrique satisfaisant aux équations d'Einstein du cas extérieur ($r = r_1 = 0$). On impose à ces deux métriques la condition suivante.

Condition de raccordement. — Pour tout point x de S, il existe un système de coordonnées admissible dont le domaine contient x, tel que les potentiels relatifs à ce système et leurs dérivées premières soient continues à la traversée de S.

Ici, nous supposerons donc les $g_{\lambda\mu}$ et les Γ^α_{λ} continus ainsi que leurs dérivées premières à la traversée de S.

Prolongement local de l'intérieur de la matière vers l'extérieur. — Donnons-nous, dans une région R limitée à une hypersurface S un champ de tenseurs dont les composantes Γ^λ_μ vérifient les équations (2-17) où $r_1 \neq 0$. Nous nous proposons de chercher à quelle condition il existe, de l'autre côté de S un champ Γ'^λ_μ vérifiant les équations (2-17) où $r = r_1 = 0$, et se raccordant avec le premier le long de S. Supposons qu'un tel champ existe. L'hypersurface S étant supposée définie localement dans un système de coordonnées admissible par $x^0 = 0$, les quantités $\delta(S^0_\lambda)$ ne dépendent que des potentiels, de leurs dérivées premières et de leurs dérivées secondes d'indice 1. Par suite, d'après les conditions de raccordement, elles ont la même valeur sur S pour les deux champs Γ et Γ'.

Premier cas : $r = 0$ de part et d'autre de S

$$\delta(S^0_\alpha) = \chi r_1 u^0 u_\alpha - \chi p_1 \delta^0_\alpha.$$

Ces quantités sont nulles pour le champ Γ'. Elles sont donc nulles également pour le champ Γ. On en déduit que nécessairement sur S

$$u^0 = 0, \qquad p_1 = 0.$$

S est donc engendrée par les lignes de courant du schéma intérieur et la pression s'annule sur S.

Réciproquement, s'il en est ainsi, S, engendrée par les lignes de courant, est partout orientée dans le temps. Sur S, les quantités $\delta(S^0_\alpha)$ associées au champ intérieur sont nulles. On en déduit facilement que les équations (1-15) sont également vérifiées sur S. Le champ extérieur Γ' se raccordant avec le champ intérieur Γ sur S est une solution du problème de CAUCHY extérieur relatif à S et aux données de CAUCHY fournies sur S par le champ intérieur, données qui satisfont aux conditions (1-15). On sait que dans ces conditions, le problème admet une solution unique dès qu'on s'est donné les Y_α. Or on peut toujours donner aux Y_α des valeurs arbitraires, en effectuant un changement de coordonnées convenable. Nous pouvons donc considérer que physiquement la solution du problème est unique.

Deuxième cas : $r \neq 0$ pour le champ intérieur. Les quantités S^0_α et $\delta(S^0_\alpha)$ sont nulles sur S. L'équation (2-17) montre alors, par le même raisonnement que plus haut que

$$p_1 = 0, \qquad \delta(u^0) = v^0 - u_\lambda \gamma^{\lambda 0} = 0$$

sur S.

Réciproquement, s'il en est ainsi, le problème du prolongement admet une solution physiquement unique.

Prolongement vers l'intérieur. — On pourrait aussi se demander s'il n'est pas possible de résoudre le problème suivant : on suppose donnée, de part et d'autre de S, une métrique ds^2 satisfaisant aux conditions d'EINSTEIN du cas intérieur ($r \neq 0$), et dont les coefficients $g_{\alpha\beta}$ ainsi que leurs dérivées premières ne subissent aucune discontinuité à la traversée de S. Supposons donnés, dans la région R un champ de tenseurs $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ dont les composantes vérifient les équations (2-17) où $r_1 \neq 0$. Peut-on trouver, de l'autre côté de S, un champ $\Gamma'^\lambda_{\mu\nu}$ vérifiant les mêmes équations, mais où $r_1 = 0$?

Nous désignerons systématiquement par des lettres accentuées les grandeurs relatives au champ Γ'. Pour le champ Γ', on a, d'après (2-19) et (2-20)

$$A'^\alpha = r(u^\alpha v'^0 + u^0 v'^\alpha)$$
$$u^\alpha A'_\alpha - r u^0 B' = r v'^0$$

et pour le champ Γ

$$A^\alpha = r_1 u^\alpha u^0 - p_1 g^{0\alpha} + r(u^0 v^\alpha + u^\alpha v^0),$$
$$u^\alpha A_\alpha - r u^0 B = u^0 \rho_1 + r v^0.$$

D'après les conditions de raccordement, les A et B relatifs aux deux champs ont la même valeur sur S. En conséquence, sur S, on a

$$u^0 \rho_1 + r v^0 = r v'^0 \tag{2-25}$$

$$\rho_1 u^\alpha u^0 + p_1(u^\alpha u^0 - g^{\alpha 0}) + r(u^0 v^\alpha + u^\alpha v^0) = r(u^\alpha v'^0 + u^0 v'^\alpha) \tag{2-26}$$

On fait d'abord $\alpha = 0$

$$\rho_1 (u^0)^2 + p_1((u^0))^2 - g^{00}) + 2 r u^0 v^0 = 2 r u^0 v'^0,$$

qui s'écrit, d'après (2-25)

$$\rho_1 (u^0)^2 + p_1(g^{00} - (u^0)^2) = 0.$$

Éliminons le cas où S serait un front d'onde hydrodynamique, c'est-à-dire où on a un schéma fluide parfait dans lequel

$$(u^0)^2 + (g^{00} - (u^0)^2)\varphi'(p) = 0$$

sur S. Il reste :

Dans un schéma matière pure

$$u^0 = 0.$$

Dans un schéma fluide parfait

$$p_1 = 0.$$

Dans les deux cas, $v^0 = v'^0$. Dans le premier cas, (2-26) est identiquement vérifiée. Dans le second, il reste

$$r u^0 (v^\alpha - v'^\alpha) = 0.$$

S'il y a effectivement discontinuité, il faut que $u^0 = 0$. Mais alors, (2-26) ne permet plus de déterminer les v^i sur S, et on ne peut rien affirmer au sujet du problème du prolongement.

II. Schéma « champ électromagnétique ».

Dans ce paragraphe, nous supposerons d'abord que la métrique ds^2 décrit un champ électromagnétique singulier. Le tenseur impulsion énergie qui lui correspond sera noté

$$T_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta$$

où τ est une quantité scalaire, l_α un vecteur isotrope. La métrique variée $\overline{ds}^2$ sera supposée décrire un champ électromagnétique.

Nous montrerons que le vecteur l_α peut être associé à un état de radiation totale généralisée au sens de L. Bel, relativement à la métrique ds^2.

Nous traiterons ensuite rapidement le cas général en nous plaçant dans le cadre de la théorie Jordan Thiry.

1. Étude d'un champ électromagnétique obtenu par variation d'un champ électromagnétique singulier.

a) *Équations vérifiées par le tenseur impulsion énergie dans un schéma champ électromagnétique quelconque.* — L'étude de l'électromagnétisme en relativité restreinte conduit à représenter le champ électromagnétique par un tenseur antisymétrique $F_{\alpha\beta}$ dont les composantes, dans un système de coordonnées admissible, sont des fonctions de classe C^2 par morceaux. A un tel champ, on associe un tenseur d'impulsion énergie défini par l'équation

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - F_{\alpha\lambda} F^{\lambda}{}_{\beta}.$$

Le calcul fait dans ce paragraphe est un calcul local. Nous utiliserons les notations suivantes : E désigne l'espace vectoriel tangent au point M de V_4, $S = [e_0, e_1, e_2, e_3]$ une base de cet espace, c'est-à-dire une application régulière linéaire de R^4 dans E. $A = [a_{\alpha\beta}]$ est la matrice de Gram associée à la base matrice dont les éléments sont les produits scalaires des vecteurs de base. On désigne par $\overline{S}$ l'application transposée de S.

On a

$$\overline{S}S = A.$$

Aux tenseurs champ électromagnétique et impulsion énergie, on peut associer canoniquement les applications notées F et T de E dans E. Si on choisit pour S la base naturelle, F et T sont représentées dans cette base par les matrices de composantes $F_\alpha{}^\beta$ et $T_\alpha{}^\beta$. La trace de ces matrices sera respectivement notée Tr(F) et Tr(E), leurs déterminants par dét (F) et dét (T). Avec ces notations, on a

(2-27) $$\overline{T} = T$$

(2-29) $$\overline{F} = -F, \qquad \text{dét}\,(F) \leqslant 0, \qquad \text{Tr}\,(F) = 0$$

(2-30) $$T = \frac{1}{4} \text{Tr}\,(F^2) - F^2$$

et, de façon évidente

$$\mathrm{Tr}\,(T) = 0.$$

F, étant une application linéaire de E dans E vérifie, d'après le théorème d'Hamilton Cayley, une équation algébrique de degré 4, soit

$$F^4 + a_1F^3 + a_2F^2 + a_3F + a_4 = 0.$$

Le calcul des coefficients par la méthode de J. M. Souriau donne

$$a_1 = a_3 = 0.$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(F^2),$$

$$a_4 = \text{dét}\,(F) = -\frac{1}{4}\left(\mathrm{Tr}\,(F^4) - \frac{1}{2}\,(\mathrm{Tr}\,(F^2))^2\right).$$

Donc F satisfait l'équation

$$(2\text{-}31)\quad F^4 - \frac{1}{2}\,F^2\,\mathrm{Tr}\,(F^2) - \frac{1}{4}\left[\mathrm{Tr}\,(F^4) - \frac{1}{2}\,(\mathrm{Tr}\,(F^2))^2\right] = 0.$$

Mais (2-30) élevée au carré s'écrit

$$T^2 = F^4 - \frac{1}{2}\,F^2\,\mathrm{Tr}\,(F^2) + \frac{1}{16}\,(\mathrm{Tr}\,(F^2))^2.$$

On a donc, d'aprés (2-31)

$$T^2 = \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,(F^4) - \frac{1}{16}\,(\mathrm{Tr}\,(F^2))^2.$$

Mais dét (F) est négatif. Donc à fortiori

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,(F^4) - \frac{1}{16}\,(\mathrm{Tr}\,(F^2))^2 \geqslant 0.$$

Nous poserons

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}(F^4) - \frac{1}{16}\,(\mathrm{Tr}(F^2))^2 = k^2.$$

Par suite,

$$T^2 = k^2.$$

Réciproquement, soit T une application d'un espace vectoriel E, de dimension 4, muni d'une métrique de type hyperbolique normal, dans lui-même, vérifiant

$$(2\text{-}32)\qquad \begin{cases} T = \overline{T} \\ T^2 = k^2 \\ \mathrm{Tr}\,(T) = 0 \end{cases}$$

et où la valeur propre associée au vecteur propre orienté dans le temps est négative. Alors, T peut être interprété comme l'application associée au tenseur impulsion énergie d'un champ électromagnétique.

Supposons d'abord $k \neq 0$. L'équation $T^2 = k^2$ montre que T a pour valeurs propres k et $-k$. On sait (réduction de JORDAN des matrices) qu'il existe une base S réelle, dans laquelle l'application T est représentée par une matrice diagonale de la forme

$$\begin{bmatrix} -k & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -k & \\ 0 & & & k \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{bmatrix}.$$

Ici, T est de dimension 4, et Tr(T) est nul. On a certainement dans cette base

$$T = S \begin{bmatrix} -k & & & 0 \\ & -k & & \\ & & k & \\ 0 & & & k \end{bmatrix} S^{-1}.$$

On vérifie alors facilement que l'application

$$F = S \begin{bmatrix} 0 & X & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & -L & 0 \end{bmatrix} S^{-1}$$

où X et L sont deux scalaires arbitraires vérifiant

$$X^2 + L^2 = 2k^2$$

satisfait (2-30).

Supposons maintenant $k = 0$. Les équations (2-32) se réduisent à

$$\begin{cases} T = \overline{T}. \\ \overline{T}T = 0. \end{cases}$$

Soient X, Y, Z, U les colonnes de la matrice représentant T dans une base arbitraire

$$T = S[X, Y, Z, U]S^{-1}.$$

Mais

$$S^{-1} = A^{-1}\overline{S}.$$

Donc

$$T = S[X, Y, Z, U]\, A^{-1}\overline{S}.$$

En transposant, il vient

$$\overline{T} = SA^{-1}\begin{bmatrix}\overline{X}\\ \overline{Y}\\ \overline{Z}\\ \overline{U}\end{bmatrix}\overline{S}$$

et, par conséquent

$$\overline{T}T = SA^{-1}\begin{bmatrix}\overline{X}AX & \overline{X}AY & \overline{X}AZ & \overline{X}AU\\ \overline{Y}AX & \overline{Y}AY & \overline{Y}AZ & \overline{Y}AU\\ \overline{Z}AX & \overline{Z}AY & \overline{Z}AZ & \overline{Z}AU\\ \overline{U}AX & \overline{U}AY & \overline{U}AZ & \overline{U}AU\end{bmatrix}A^{-1}\overline{S}.$$

Les applications S et A étant régulières, $\overline{T}T = 0$ entraîne

$$\overline{X}AX = \overline{Y}AY = \overline{Z}AZ = \overline{U}AU = 0$$

ce qui signifie que les vecteurs SX, SY, SZ, SU, sont isotropes, et

$$\overline{X}AY = \overline{X}AZ = \overline{X}AU = \cdots = 0$$

ce qui signifie que chacun de ces vecteurs est orthogonal aux autres. Ils sont donc parallèles, et on a

$$SX = a_1V, \qquad Y = a_2V, \qquad Z = a_3V, \qquad U = a_4V,$$

où a_1, a_2, a_3, a_4 sont des scalaires, V un vecteur isotrope. On a alors

$$T = [a_1V\ a_2V\ a_3V\ a_4V]\,S^{-1} = V[a_1\ a_2\ a_3\ a_4]\,S^{-1}.$$

Or $[a_1\,a_2\,a_3\,a_4]\,S^{-1}$ est un élément arbitraire du dual de E. Nous écrirons

$$[a_1\ a_2\ a_3\ a_4]\,S^{-1} = \overline{W}$$

W étant un vecteur arbitraire de E. Par suite,

$$T = V\overline{W}.$$

Mais $T = \overline{T}$ entraîne

$$W = \tau V.$$

Au total

$$T = \tau V\overline{V}$$

ou, en revenant aux composantes

$$T_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta, \qquad l_\alpha l^\alpha = 0.$$

Il s'agit d'un champ électromagnétique singulier.

b) *Étude de la variation du tenseur impulsion énergie d'un champ électromagnétique lorsque le champ initial est singulier.*

THÉORÈME. — *La variation du tenseur impulsion-énergie d'un champ électromagnétique, lorsque le champ initial est singulier* ($T_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta$, $g^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta = 0$) *peut s'écrire localement*

$$\delta(T_{\alpha\beta}) = \tau_1 l_\alpha l_\beta + a(l_\alpha m_\beta + l_\beta m_\alpha) + k(U_\alpha U_\beta - V_\alpha V_\beta).$$

a, τ_1 *et k sont des scalaires, m un vecteur isotrope tel que* $m_\alpha l^\alpha = 1$, U *et* V *deux vecteurs orthogonaux entre eux et orthogonaux à l et m.*

Démonstration. — Pour démontrer ce théorème, nous partirons du système (2-32)

$$\begin{cases} T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}, \\ g^{\alpha\beta} T_{\alpha\lambda} T_{\beta\mu} = \sigma g_{\lambda\mu}, \\ g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0. \end{cases}$$

Par variation de ces trois équations, il vient

$$\begin{cases} \delta(T_{\alpha\beta}) = \delta(T_{\beta\alpha}), \\ -\gamma^{\alpha\beta} T_{\alpha\lambda} T_{\beta\mu} + g^{\alpha\beta}\delta(T_{\alpha\lambda}) T_{\beta\mu} + g^{\alpha\beta} T_{\alpha\lambda}\delta(T_{\beta\mu}) = \sigma g_{\lambda\mu} + \delta\sigma\gamma_{\lambda\mu}. \\ -\gamma^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\delta(T_{\alpha\beta}) = 0. \end{cases}$$

Nous poserons pour simplifier l'écrirure

$$\delta(T_{\alpha\beta}) = E_{\alpha\beta}, \qquad \delta\sigma = \sigma_1.$$

Mais, d'après les hypothèses,

$$T_{\alpha\beta} = \tau l_\alpha l_\beta, \qquad \sigma = 0.$$

Par suite, le système précédent s'écrit

(2-33) $\qquad E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha}.$

(2-34) $\qquad \tau E^\alpha_\lambda l_\alpha l_\mu + \tau l_\lambda (l_\alpha E^\alpha_\mu - \tau\gamma^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta l_\mu) = \sigma_1 g_{\lambda\mu},$

(2-35) $\qquad E^\lambda_\lambda = \tau\gamma^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta.$

Nous poserons enfin

(2-36) $\qquad \tau\gamma^{\alpha\beta} l_\alpha l_\beta = 2a.$

Considérons plus particulièrement l'équation (2-34). Au premier membre est associée une matrice de rang $\leqslant 2$. En effet, si on désigne par Z^μ les composantes contravariantes d'un vecteur arbitraire, le produit contracté de ce premier membre par Z^μ est

$$(\tau E^\alpha_\lambda l_\alpha l_\mu + \tau l_\lambda (l_\alpha E^\alpha_\mu - 2a l_\mu)) Z^\mu.$$

C'est un covecteur appartenant au sous-espace engendré par les

deux covecteurs $E^{\alpha}_{\lambda} l_{\alpha}$ et l_{λ}. Mais la matrice $(g_{\lambda\mu})$ est régulière par hypothèse, donc de rang 4. L'égalité n'est possible que si

$$\sigma_1 = 0.$$

Par suite, (2-34) s'écrit

(2-37) $$E^{\alpha}_{\lambda} l_{\alpha} l_{\mu} + l_{\lambda}(l_{\alpha} E^{\alpha}_{\mu} - 2a l_{\mu}) = 0.$$

Posons

$$X_{\lambda} = E^{\alpha}_{\lambda} l_{\alpha}.$$

Il vient

(2-38) $$X_{\lambda} l_{\mu} + l_{\lambda}(X_{\mu} - 2a l_{\mu}) = 0.$$

On en déduit par contraction

$$X_{\lambda} l^{\lambda} = 0.$$

Le vecteur X appartient donc au 3-plan orthogonal à l (qui contient l). Il existe nécessairement un vecteur U de ce trois-plan orthogonal à l, normé par $U_{\alpha} U^{\alpha} = -1$, tel que l'on ait

$$X = bl + cU$$

où b et c sont des scalaires. Mais en reportant cette valeur de X dans (2-38), on a

$$2b l_{\lambda} l_{\mu} - 2a l_{\lambda} l_{\mu} + c(l_{\lambda} U_{\mu} + l_{\mu} U_{\lambda}) = 0.$$

La multiplication contractée par U_{λ} donne

$$c = 0, \qquad b = a.$$

Au total,

$$E^{\lambda}_{\alpha} l^{\alpha} = a l^{\lambda}.$$

Le vecteur isotrope l^{λ} est vecteur propre de la matrice E^{λ}_{α} avec la valeur propre a. — Choisissons une base Σ définie de la façon suivante : l en est le premier vecteur. Le deuxième vecteur m est un vecteur isotrope vérifiant $m_{\alpha} l^{\alpha} = 1$. Les deux derniers vecteurs U et V sont deux vecteurs d'espace orthogonaux à l et à m, orthogonaux entre eux, et normés par $U_{\alpha} U^{\alpha} = -1$, $V_{\alpha} V^{\alpha} = -1$. Compte tenu de la symétrie de E, on a, en désignant par $c_{\lambda\mu}$ les composantes covariantes du tenseur $E_{\alpha\lambda}$ dans la base Σ

$$\begin{aligned} E_{\alpha\lambda} = {} & c_{00} l_{\alpha} l_{\lambda} + a(l_{\alpha} m_{\lambda} + l_{\lambda} m_{\alpha}) + c_{02}(l_{\alpha} U_{\lambda} + U_{\alpha} l_{\lambda}) \\ & + c_{03}(l_{\alpha} V_{\lambda} + l_{\lambda} V_{\alpha}) + c_{22} U_{\alpha} U_{\lambda} + c_{23}(U_{\alpha} V_{\lambda} + U_{\lambda} V_{\alpha}) \\ & + c_{33} V_{\alpha} V_{\lambda} \end{aligned}$$

(2-35) entraîne $c_{22} = -c_{33}$.

On simplifie l'expression de $E_{\alpha\lambda}$ obtenue en effectuant une rotation du repère Σ autour du vecteur l. On fait d'abord une rotation dans le deux-plan (U, V)

$$U \to \cos\theta U - \sin\theta V,$$
$$V \to \sin\theta U + \cos\theta V,$$

telle que, dans la nouvelle base, le coefficient de $U_\alpha V_\lambda + U_\lambda V_\alpha$ soit nul, ce qui est toujours possible. Il suffit en effet de choisir pour θ un angle tel que

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{c_{23}}{c_{22}},$$

si $c_{22} \neq 0$,

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

si $c_{22} = 0$. On a alors, en gardant la même notation

$$E_{\alpha\lambda} = c_{00} l_\alpha l_\lambda + a(l_\alpha m_\lambda + l_\lambda m_\alpha) + c_{02}(l_\alpha U_\lambda + l_\lambda U_\alpha) + c_{03}(l_\alpha V_\lambda + l_\lambda V_\alpha) + c_{22}(U_\alpha U_\lambda - V_\alpha V_\lambda)$$

On vérifie alors que la transformation

$$l \to l, \quad m \to m + \frac{1}{2}\lambda^2 l + \lambda U, \quad U \to U + \lambda l, \quad V \to V$$

est une rotation dans le 2-plan (m, U). Le nouveau coefficient du terme $l_\alpha U_\lambda + l_\lambda U_\alpha$ est

$$c'_{02} = c_{02} + \lambda(a + c_{22}).$$

Si a est différent de $-c_{22}$, on peut choisir λ de telle sorte que $c'_{02} = 0$. Le coefficient a est invariant dans une telle transformation.

Enfin, on vérifie que la transformation

$$l \to l, \quad m \to m + \frac{1}{2}\mu^2 l + \mu V, \quad U \to U, \quad V \to V + \mu l$$

est également une rotation, mais cette fois dans le 2-plan (m, V). Le nouveau coefficient du terme $l_\alpha V_\lambda + l_\lambda V_\alpha$ est

$$c'_{03} = c_{03} + \mu(a - c_{22}).$$

Si a est différent de c_{22} on peut choisir μ de telle sorte que $c'_{03} = 0$. Au total, dans la nouvelle base, E s'écrira

(2-39) $\quad E_{\alpha\lambda} = \tau_1 l_\alpha l_\lambda + a(l_\alpha m_\lambda + l_\lambda m_\alpha) + k(U_\alpha U_\lambda - V_\alpha V_\lambda)$

sous réserve que l'on ait

$$a^2 \neq k^2.$$

Pour achever la détermination du tenseur E, il faut faire intervenir les variations secondes. Nous poserons

$$\delta_2 T_{\alpha\beta} = T^{(2)}_{\alpha\beta}, \qquad \delta_2 \sigma = \sigma_2, \qquad \delta_2 g_{\lambda\mu} = g^{(2)}_{\lambda\mu}.$$

De

$$g^{\alpha\beta} g_{\lambda\beta} = \delta^{\alpha}_{\lambda}$$

on déduit d'abord

$$\delta_2(g^{\alpha\beta}) = - g^{(2)\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\lambda}\gamma^{\beta}_{\lambda}.$$

Puis, de la deuxième équation du système (2-32)

$$\delta_2(g^{\alpha\beta}) T_{\alpha\lambda} T_{\beta\mu} - \gamma^{\alpha\beta}(E_{\alpha\lambda} T_{\beta\mu} + T_{\alpha\lambda} E_{\beta\mu}) + (T^{(2)}_{\alpha\lambda} T^{\alpha}{}_{\mu} + E_{\alpha\lambda} E^{\alpha}{}_{\mu} + T_{\lambda}{}^{\alpha} T^{(2)}_{\alpha\mu}) = \sigma_2 g_{\lambda\mu}.$$

La multiplication contractée des deux membres de cette équation par $U^{\lambda} U^{\mu}$ conduit à

$$U^{\lambda} U^{\mu} E_{\alpha\lambda} E^{\alpha}{}_{\mu} = - \sigma_2,$$

qui s'écrit, compte tenu de (2-39)

$$k^2 = \sigma_2.$$

Le problème ne sera donc possible que si σ_2 est positif. On a alors

$$k = \pm \sqrt{\sigma_2}.$$

Nous remarquerons enfin que a peut être amené à prendre une valeur arbitraire par un changement de coordonnées de la forme

$$x \to x + \delta x,$$

Dans un tel changement de coordonnées, le champ électromagnétique singulier initial reste évidemment inchangé. En exprimant tout avec les nouvelles variables, on sera amené à poser

$$2a' = l^{\alpha} l^{\beta} \gamma'_{\alpha\beta}.$$

Si on fait, comme dans le premier chapitre

$$\delta x^{\mu} = \varphi^{\mu}(x),$$

on aura

$$a' = a + \nabla_{\alpha} \varphi^{\beta} l^{\alpha} l^{\beta}.$$

On pourra par suite choisir les φ_{μ} de telle sorte que a' ait une valeur arbitraire. La condition $a^2 \neq k^2$ n'a donc pas un sens intrinsèque, et on peut toujours supposer les coordonnées choisies de telle sorte que $E_{\alpha\beta}$ ait la forme réduite obtenue plus haut.

c) *Étude d'un état de radiation totale généralisée.* — Nous allons associer au tenseur impulsion-énergie $T_{\alpha\lambda} + E_{\alpha\lambda}$ un état de radiation totale généralisée au sens de L. Bel.

Rappelons d'abord les points suivants : au tenseur de courbure $R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$, défini en x_0, on associe les tenseurs

$$*R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta,\nu\delta}R^{\nu\delta}{}_{,\lambda\mu}, \qquad **R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta,\nu\delta}\eta_{\lambda\mu,\rho\sigma}R^{\nu\delta,\rho\sigma}$$

$\eta_{\alpha\beta,\nu\delta}$ étant la forme élément de volume au point x_0.

L. Bel a proposé de dire que le point x_0 de V_4 présente un état de radiation totale généralisée si les conditions suivantes sont satisfaites.

H_1) Il existe un vecteur isotrope L tel que

$$R_{\alpha\beta,\lambda\mu}L^\alpha L^\lambda = 0, \qquad *R_{\alpha\beta,\lambda\mu}L^\alpha L^\lambda = 0, \qquad **R_{\alpha\beta,\lambda\mu}L^\alpha L^\lambda = 0.$$

H_2) Il existe un vecteur e_0, de carré + 1, tel que

$$R_{\alpha\beta,\lambda\mu}e_0^\alpha e_0^\lambda L^\beta = 0, \qquad **R_{\alpha\beta,\lambda\mu}e_0^\alpha e_0^\lambda L^\beta = 0.$$

S'il en est ainsi, L. Bel démontre que le tenseur d'Einstein admet la réduction

$$S_{\alpha\beta} = \tau L_\alpha L_\beta - \frac{1}{2}(s_2 + s_3)(e_{0\alpha}e_{0\beta} - e_{1\alpha}e_{1\beta}) + s_2 e_{2\alpha}e_{2\beta} + s_3 e_{3\alpha}e_{3\beta}.$$

Dans cette équation, les vecteurs e_α constituent une base orthonormée au point x_0 telle que $e_0 + e_1 = L$; e_2 et e_3 sont des vecteurs propres de S_α^β correspondants aux valeurs propres s_2 et s_3.

L. Bel démontre également que, si $s_2 \neq 0$ et $s_3 \neq 0$ ou bien si $s_2 = s_3 = 0$, les trajectoires du vecteur L associé à un état de radiation totale généralisée défini dans un domaine sont, dans ce domaine les géodésiques de la métrique.

Or, nous avons trouvé, dans le paragraphe précédent, que le tenseur obtenu par variation du tenseur impulsion-énergie d'un champ électromagnétique, lorsque le champ initial est singulier, peut s'écrire

$$T_{\alpha\beta} + \delta T_{\alpha\beta} = (\tau + \tau_1)\, l_\alpha l_\beta + a(l_\alpha m_\beta + m_\alpha l_\beta) + k(U_\alpha U_\beta - V_\alpha V_\beta).$$

Les coefficients de la métrique $\overline{ds^2}$ associée à un tel schéma énergétique, sont supposés vérifier les équations d'Einstein

$$\begin{aligned}(2\text{-}40)\quad \overline{S}_{\alpha\beta} &= S_{\alpha\beta} + \delta(S_{\alpha\beta}) + o(\delta)\\ &= \chi(\tau + \tau_1)\, l_\alpha l_\beta + \chi a(l_\alpha m_\beta + l_\beta m_\alpha) + \chi k(U_\alpha U_\beta - V_\alpha V_\beta) + o(\delta)\end{aligned}$$

où le symbole $o(\delta)$ désigne un terme petit par rapport aux variations des variables initiales (en particulier par rapport à τ_1 et à k).

On remarque que

$$\tau l_\alpha l_\beta + a(l_\alpha m_\beta + l_\beta m_\alpha) = \tau\left(l_\alpha + \frac{a}{\tau}m_\alpha\right)\left(l_\beta + \frac{a}{\tau}m_\beta\right) + o(\delta).$$

Nous sommes donc amenés à introduire le vecteur

$$L_\alpha = l_\alpha + \frac{a}{\tau} m_\alpha.$$

Pour la métrique $\overline{ds^2}$, les composantes contravariantes de ce vecteur sont

$$\overline{L}^\alpha = (g^{\alpha\lambda} - \gamma^{\alpha\lambda})\left(l_\lambda + \frac{a}{\tau} m_\lambda\right)$$

ou

$$\overline{L}^\alpha = l^\alpha + \frac{a}{\tau} m^\alpha - \gamma^{\alpha\lambda} l_\lambda + o(\delta).$$

On vérifie facilement que $L_\alpha \overline{L}^\alpha = o(\delta)$.

Le vecteur L *est isotrope pour la métrique* $\overline{ds^2}$. Il existe donc des vecteurs d'espace U′ et V′, définis au point x_0 de V_4, normés, orthogonaux entre eux, orthogonaux à L pour la métrique $\overline{ds^2}$, tels que l'on ait

$$\overline{S}_{\alpha\beta} = \chi(\tau + \tau_1) L_\alpha L_\beta + \chi k (U'_\alpha U'_\beta - V'_\alpha V'_\beta) + o(\delta).$$

$\overline{S}_{\alpha\beta}$ est donc un cas particulier du tenseur d'Einstein trouvé par L. Bel : on a ici $s_2 = -s_3 = k$, $e_2 = U'$, $e_3 = V'$.

Dès lors, si on suppose les hypothèses H_1 et H_2 vérifiées pour $\overline{R}$, $*\overline{R}$ et $**\overline{R}$, on a un état de radiation totale généralisée, pour lequel les trajectoires du vecteur L sont les géodésiques de la métrique $\overline{ds^2}$.

Réduction des hypothèses définissant l'état de radiation totale généralisée. — Soit une variété V_4 sur laquelle est définie une métrique $(\mathfrak{M})$, de type hyperbolique normal. Soit $A_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ un tenseur défini en un point x_0 de V_4 et présentant les mêmes symétries que le tenseur de courbure. On considère les 7 relations

$$(a) \qquad A_{\alpha\beta} = \tau L_\alpha L_\beta + k(U_\alpha U_\beta - V_\alpha V_\beta).$$
$$(b) \qquad L^\alpha L^\lambda A_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0.$$
$$(c) \qquad L^\alpha L^\lambda * A_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0.$$
$$(d) \qquad L^\alpha L^\lambda ** A_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0,$$
$$(e) \qquad M^\alpha M^\lambda L^\beta A_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0,$$
$$(f) \qquad M^\alpha M^\lambda L^\beta ** A_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0,$$
$$(g) \qquad A^\alpha_\alpha = 0,$$

où L et M sont deux vecteurs isotropes, satisfaisant $L_\alpha M^\alpha = 1$, U et V deux vecteurs normés par $U_\alpha U^\alpha = V_\alpha V^\alpha = -1$, orthogonaux entre eux, orthogonaux à L et à M. Ces équations sont manifeste-

ment équivalentes, dans le cas particulier étudié, à celles de L. Bel. On a simplement posé

$$M = e_0 - \frac{L}{2}.$$

On prend comme base du sous-espace vectoriel tangent à V_4 en x_0

$$\Sigma = [L, M, U, V].$$

On en déduit une base pour le sous-espace des tenseurs antisymétriques d'ordre 2

$$B = [L \wedge M, L \wedge U, L \wedge V, M \wedge U, M \wedge V, U \wedge V]$$

On écrit dans cette base les composantes des tenseurs A, $*A$, $**A$ et les équations $(a) \ldots (g)$. On constate alors que les équations (a), (c) et (e) entraînent toutes les autres. Par suité, le système est équivalent à

$$\begin{cases} A_{\alpha\beta} = \tau L_\alpha L_\beta + k(U_\alpha U_\beta - V_\alpha V_\beta), \\ L^\lambda(L_\alpha A_{\beta\gamma,\lambda\mu} + L_\beta A_{\gamma\alpha,\lambda\mu} + L_\gamma A_{\alpha\beta,\lambda\mu}) = 0, \\ M^\alpha M^\lambda L^\beta A_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0. \end{cases}$$

Ces résultats s'appliquent en particulier, en l'absence de constante cosmologique, en prenant pour tenseur $A_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ le tenseur $\overline{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}$, et pour métrique $(\mathfrak{M})$ la métrique définie par $\overline{ds}^2$.

La métrique $\overline{ds}^2$ dont les coefficients sont supposés vérifier les trois équations

$$\begin{cases} \overline{S}_{\alpha\beta} = \chi\,(\tau + \tau_1) L_\alpha L_\beta + \chi\, k(U'_\alpha U'_\beta - V'_\alpha V'_\beta) \\ L^\lambda(L_\alpha \overline{R}_{\beta\gamma,\lambda\mu} + L_\beta \overline{R}_{\gamma\alpha,\lambda\mu} + L_\gamma \overline{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}) = 0 \\ M^\alpha M^\lambda L^\beta \overline{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu} = 0 \end{cases}$$

définit au point x_0 de V_4 un état de radiation totale généralisée.

II. Etude d'un schéma matière pure champ électromagnétique.

Nous nous placerons dans le cadre de la théorie unitaire Jordan Thiry. Rappelons que, dans la théorie de Jordan Thiry, l'élément primitif est constitué par une variété différentiable V_5, de dimension 5, satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que la variété espace temps de la relativité générale.

Sur cette variété, nous supposons définie une métrique rieman-

nienne $d\sigma^2$, partout de type hyperbolique normal, d'expression locale dans un système de coordonnées admissible

$$d\sigma^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Nous supposerons que le tenseur $g_{\alpha\beta}$ admet sur V_5 des composantes de classe C_1, C_3 par morceaux.

Nous supposons de plus que la variété riemannienne V_5 admet un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales, à trajectoires z orientées de façon que $d\sigma^2 < 0$, ne laissant invariant aucun point de V_5, la famille de ces trajectoires satisfaisant aux hypothèses suivantes :

a) Les trajectoires z sont homéomorphes à un cercle T_1.

b) On peut trouver une variété différentiable V_4, de dimension 4, satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que V_5, telle qu'il existe un homéomorphisme différentiable de classe C^2, de la variété V_5 sur le produit topologique $V_4 \times T_1$ dans lequel les z s'appliquent sur les cercles facteurs. Cet homéomorphisme est supposé continu par morceaux jusqu'à l'ordre 4.

On sait qu'il existe alors dans V_5 des coordonnées locales dites adaptées au groupe, jouissant des propriétés suivantes :

1) les $x^a(a, b \cdots = 0, 1, 2, 3)$ sont un système de coordonnées locales arbitraires de V_4. Les variétés W_4 d'équation $x^4 = C^{te}$ sont des variétés globalement définies dans V_5 et homéomorphes à V_4.

2) les potentiels $g_{\alpha\beta}$ relatifs aux coordonnées adaptées sont indépendants de la variable x^4.

L'équation

$$\varphi_a = \frac{1}{b}\frac{g_{4a}}{g_{44}}$$

où b désigne une constante numérique, définit, sur une variété W_4 un champ de vecteurs covariants φ_a. Les quantités

$$F_{ab} = \partial_a\varphi_b - \partial_b\varphi_a,$$

définissent intrinsèquement sur V_4 un tenseur. On interprète le vecteur φ_a comme le potentiel vecteur électromagnétique et le tenseur F_{ab} comme le champ électromagnétique au point considéré.

Les équations du champ, dans la théorie Jordan Thiry généralisent formellement les équations d'Einstein. On pose

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(R + k).$$

Les équations du cas unitaire extérieur s'écrivent

$$S_{\alpha\beta} = 0$$

et les équations du cas unitaire intérieur qui généralisent le schéma matière pure

$$S_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta$$

où ρ désigne un scalaire positif, u un vecteur unitaire de V_5 (de carré $+1$). Les trajectoires dans V_5 du champ de vecteur u seront dites les lignes de courant pentadimensionnelles.

Le premier membre satisfaisant aux équations de conservation, on aura nécessairement aussi

$$\nabla_\lambda(\rho u_\alpha u^\lambda) = 0.$$

Étude des équations aux variations. Problème dú prolongement. — Les notations sont les mêmes que dans le premier chapitre. Un calcul identique à celui que nous avons fait dans ce chapitre conduit à

$$\delta(R_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}\left([\Delta\underline{\Gamma}]_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha Y_\beta + \nabla_\beta Y_\alpha\right)$$

et

$$\delta(S_\alpha^\beta) = \frac{1}{2}\left([\Delta\underline{\Gamma}]_\alpha^\beta - 2R_{\alpha\lambda}\Gamma^{\beta\lambda} + \delta_\alpha^\beta R_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda\mu} + \frac{2}{3}\left(S_\alpha^\beta + \frac{1}{2}k\delta_\alpha^\beta\right) + \nabla_\alpha Y^\beta + \nabla^\beta Y_\alpha - \delta_\alpha^\beta \nabla_\lambda Y^\lambda.\right)$$

La linéarisation du deuxième membre est formellement identique à celle effectuée au premier paragraphe du deuxième chapitre. L'interprétation du vecteur Y_α, la résolution de problème de Cauchy se traitent exactement comme pour l'espace-temps de la relativité générale. Énonçons simplement le résultat dont nous nous servirons plus loin : soit dans V_5 une distribution de matière chargée engendrant un domaine D limité par une hypersurface Σ. Nous supposerons à l'intérieur de ce domaine $\rho = 0$, mais $\delta\rho = \rho_1 \neq 0$. D'un côté de Σ, il existe un champ de tenseurs $\underline{\Gamma}$ satisfaisant aux équations aux variations, associées aux équations de Jordan Thiry du cas unitaire intérieur considéré ($\rho = 0$, $\rho_1 \neq 0$). A l'extérieur du domaine D, nous avons un champ de tenseurs $\underline{\Gamma}'$ satisfaisant aux équations aux variations associées aux équations de Jordan Thiry du cas extérieur ($\rho = \rho_1 = 0$). Les $\Gamma_{\lambda\mu}$ ainsi que leurs dérivées premières sont supposées continues à la traversée de Σ : nous dirons que les champs $\underline{\Gamma}$ et $\underline{\Gamma}'$ se raccordent le long de Σ.

Théorème. — *Le champ* $\underline{\Gamma}$ *étant supposé connu, pour qu'il existe un champ* $\underline{\Gamma}'$, *solution des équations dans le cas extérieur, se raccordant avec lui le long de* Σ, *il faut que* Σ *soit engendrée par les lignes de courant pentadimensionnelles du champ intérieur. Cette condition est suffisante pour l'existence locale d'une solution extérieure physiquement unique.*

CHAPITRE III

ÉTUDE DES ÉQUATIONS AUX VARIATIONS DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE ASSOCIÉES A UN ESPACE TEMPS STATIONNAIRE

I. Définitions et résultats concernant un espace-temps riemannien stationnaire.

NOTION D'ESPACE TEMPS RIEMANNIEN STATIONNAIRE.

Nous dirons qu'un espace temps riemannien V_4 est stationnaire s'il existe un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales de V_4, à trajectoires z orientées dans le temps, ne laissant invariant aucun point de V_4, la famille des lignes z, ou lignes de temps, satisfaisant aux hypothèses suivantes :

a) Les lignes de temps sont homéomorphes à la droite réelle R.

b) On peut trouver une variété différentiable V_3, de dimension 3, satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que V_4 telle qu'il existe un homéomorphisme différentiable de classe C^2, C^4 par morceaux, de la variété V_4 sur le produit topologique $V_3 \times R$, dans lequel les z s'appliquent sur les droites facteurs. Nous identifierons V_3 à l'espace dont les points sont les lignes de temps z. On l'appellera l'espace quotient.

On démontre qu'il existe alors dans V_4 des coordonnées locales (x^α), dites adaptées au caractère stationnaire, jouissant des propriétés suivantes :

a) Les (x^i), où $i = 1, 2, 3$, sont un système de coordonnées locales arbitraires de V_3. Nous supposerons les variétés $x^0 =$ constante globalement définies dans V_4 et homéomorphes à V_3. Nous les appellerons sections d'espace, et nous désignerons par W_3 une telle section d'espace déterminée de V_4. Les (x^i) définissent pour elle des coordonnées locales.

b) Les potentiels $g_{\alpha\beta}$ relatifs aux coordonnées adaptées sont indépendants de la variable x^0. Le vecteur ξ, générateur infinitésimal du groupe d'isométries admet pour carré

$$\xi^2 = g_{00} > 0 \qquad (\xi = \sqrt{g_{00}} > 0).$$

c) Ces coordonnées sont définies à un changement de coordonnées près

$$x^{i'} = \psi^{i'}(x^j) \qquad x^{0'} = x^0 + \psi(x^j).$$

Dans toute la suite, nous n'introduirons que des systèmes de coordonnées locales adaptées et nous désignerons toujours par $g_{\alpha\beta}$ les potentiels de gravitation d'un espace temps stationnaire dans un tel système de coordonnées.

Tenseurs de V_4 et de W_3 se correspondant dans l'application canonique de V_4 sur W_3.

a) Considérons l'application μ de V_4 sur une section d'espace W_3 déterminée de V_4 définie de la façon suivante : à tout point x de V_4 de coordonnées (x^α), μ fait correspondre le point y de W_3 de coordonnées (x^i).

L'application μ définit une application linéaire de l'espace T_x tangent en x à V_4 dans l'espace T_y tangent en y à W_3 : à tout élément X de T_x, il suffit de faire correspondre l'élément μX de T_y défini par

$$(\mu X)^i = X^i.$$

On voit que μX ne dépend pas des coordonnées locales adaptées choisies, et que l'application ainsi définie est linéaire. De cette application linéaire de T_x dans T_y, on déduit une application linéaire, encore notée μ, de l'espace vectoriel des tenseurs contravariants d'ordre q au point x, $T_x^{(q)}$ dans l'espace vectoriel des tenseurs contravariants d'ordre q au point y, $T_y^{(q)}$. Ainsi, au tenseur $\underline{\Gamma}$ d'ordre deux défini au point x de V_4, l'application μ fera correspondre un tenseur $\dot{\Gamma} = \mu\Gamma$ défini au point y de W_3, et on aura

$$\dot{\Gamma}^{ij} = \Gamma^{ij}.$$

Nous appliquons les formules précédentes au tenseur métrique g de V_4, dont les composantes contravariantes sont notées $g^{\alpha\beta}$. L'application μ lui fait correspondre, en chaque point de W_3 le tenseur contravariant $\dot{g}$, dont les composantes sont données par la formule

$$\dot{g}^{ij} = g^{ij}.$$

Nous supposerons W_3 douée de la structure de variété riemannienne définie négative déterminée par le tenseur $\dot{g}$. Les composantes covariantes de ce tenseur, données par

$$\dot{g}^{ij}\dot{g}_{ik} = \delta^j_k,$$

s'expriment en fonction des $g_{\alpha\beta}$ par la formule

$$\dot{g}_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}.$$

b) Considérons plus généralement l'application σ qui fait correspondre au vecteur covariant X défini au point x de V_4, le scalaire $\frac{X_0}{\sqrt{g_{00}}}$, défini au point y de W_3

$$\sigma X = \frac{X_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{X_0}{\xi}$$

σX ne dépend pas non plus des coordonnées locales adaptées choisies et est invariant par tout changement de coordonnées

$$x^0 = \lambda x^{0'}, \qquad x^i = x^{i'}$$

où λ est un scalaire indépendant de x^0. Enfin l'application ainsi définie est linéaire.

c) On en déduit une application σ, linéaire, de l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre $p + q$ au point x de V_4 (contravariants d'ordre p, covariant d'ordre q), dans l'espace vectoriel des tenseurs contravariants d'ordre p au point y de W_3.

On aura par exemple, si $T \in T^2_x \otimes T^*_x \otimes T_x$

$$(\sigma T)^{ijk} = \frac{1}{\xi} T^{ij}{}_0{}^k.$$

L'application σ ne dépend pas des coordonnées locales adaptées choisies.

Dans le cas particulier où les tenseurs T définis sur V_4 ne dépendent pas de la variable x_0, les tenseurs σT définis sur W_3 viennent s'appliquer les uns sur les autres dans l'application induite par l'homéomorphisme de deux sections d'espace de systèmes différents. Ils peuvent ainsi être considérés comme définis sur l'espace quotient V_3. C'est ainsi que le tenseur contravariant $\dot{g}$ est défini sur V_3. Nous supposerons toujours que V_3 a été doué de la structure de variété riemannienne définie par le tenseur $\dot{g}$: V_3 et W_3 sont donc isométriques.

RAPPEL DE QUELQUES RÉSULTATS CONCERNANT LES ESPACES TEMPS STATIONNAIRES.

Notations. — Nous poserons

$$\begin{cases} g_{00} = \xi^2, \\ g_{0i} = \xi^2 \varphi_i, \\ H_{ij} = \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i. \end{cases}$$

On vérifie facilement que ξ et H_{ij} définissent des tenseurs sur l'espace quotient V_3, φ_i un vecteur sur la section d'espace W_3.

Introduction sur V_4 d'un repère orthonormé adapté. — A chaque point x d'un voisinage de V_4, associons un repère orthonormé dit adapté, dont le premier vecteur de base e_0 est le vecteur unitaire tangent en x à la ligne de temps passant par x. Nous désignerons par $z(x)$ cette ligne de temps. Le vecteur dx est représenté par

$$dx = \omega^\alpha e_\alpha = \omega^0 e_0 + \omega^i e_i$$

où les ω^α sont des formes de Pfaff locales. La métrique de V_4 s'écrit alors

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - \sum_i (\omega^i)^2, \tag{3-1}$$

où les ω^i s'annulent le long des lignes de temps.

Soit (x^λ) un système adapté de coordonnées locales. Les ω^i étant des formes de Pfaff par rapport aux dx^i, on voit que (3-1) n'est autre que la décomposition en carrés de la forme quadratique fondamentale, la variable dx^0 jouant le rôle de variable directrice. En effectuant cette décomposition, il vient

$$ds^2 = (\omega^0)^2 + d\dot{s}^2$$

avec

$$\omega^0 = \xi(dx^0 + \varphi_i\, dx^i) \tag{3-2}$$

et

$$d\dot{s}^2 = \dot{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

Désignons par A^i_j la matrice qui fait correspondre les formes de Pfaff ω^i aux différentielles dx^i

$$\omega^i = A^i_j\, dx^j. \tag{3-3}$$

A^i_j désignant alors la matrice inverse de la précédente, on a aussi

$$dx^i = A^i_j \omega^j. \tag{3-4}$$

Dans W_3 ou dans V_3, les formules (3-3) et (3-4) définissent le passage des coordonnées locales x^i au repère orthonormé e_i. C'est ainsi que le vecteur φ_i de W_3 a pour composantes dans le repère e_i

$$\varphi_i = A_i^j \varphi_j.$$

(3-2) s'écrit alors

$$\omega^0 = \xi(dx^0 + \varphi_i \omega^i),$$

d'où on tire

$$dx^0 = \frac{1}{\xi}\,\omega^{II} - \varphi_i \omega^i.$$

Le changement de repère dans V_4 s'effectuera à l'aide de la matrice A_β^α, et de la matrice inverse A_α^β. On a

$$(3\text{-}5) \qquad A_0^0 = \xi, \qquad A_i^0 = \xi\varphi^i, \qquad A_0^i = 0,$$
$$A_0^0 = \frac{1}{\xi}, \qquad A_0^i = 0, \qquad A_i^0 = -\varphi_i.$$

Remarque. — Si V_4 avait été supposée munie d'une métrique définie positive, nous aurions eu

$$ds^2 = (\omega^0)^2 + \varphi_i(\omega^i)^2.$$

Dans une telle métrique, toutes les formules écrites plus haut sont inchangées ou subissent un changement évident. Nous supposerons, jusqu'à nouvel ordre, que V_4 admet une telle métrique définie positive.

Définition des coefficients de rotation de Ricci. Dérivée covariante d'un tenseur en repère orthonormé adapté. — Désignons par U_α les composantes covariantes d'un vecteur U défini au point x de V_4 dans le repère naturel. On sait que la dérivée covariante $\nabla_\lambda U_\alpha$ définit en ce point les composantes d'un tenseur d'ordre deux. En repère orthonormé adapté, les composantes de ce même tenseur, désignées par $\nabla_\lambda U_\alpha$, sont, d'après la formule de changement de repère, données en fonction des anciennes composantes par

$$\nabla_\lambda U_\alpha = A_\lambda^\lambda A_\alpha^\alpha \nabla_\lambda U_\alpha.$$

Mais on sait aussi que les dérivées covariantes, en repère orthonormé, et dans une métrique définie positive se calculent par des formules formellement identiques à celles qui donnent les dérivées covariantes en repère naturel : il suffit de remplacer les symboles de

Christoffel par les coefficients de rotation de Ricci définis, à partir de la matrice de changement de repère par

$$\gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} = A_{\beta}^{\rho} A_{\lambda}^{\sigma} \nabla_{\sigma} A^{\alpha}_{\rho}.$$

L'hypothèse faite sur la signature de la métrique, permet de ne pas distinguer dans un tel repère les indices covariants des indices contravariants. C'est pourquoi nous placerons désormais tous les indices en position inférieure, en conservant la condition de sommation par rapport à un indice deux fois répété. Avec ces conventions, on a

$$\nabla_{\lambda} U_{\alpha} = \partial_{\lambda} U_{\alpha} - \gamma_{\alpha\beta\lambda} U_{\lambda}$$

où

$$\partial_{\lambda} = A_{\lambda}^{\mu} \partial_{\mu}, \qquad U_{\alpha} = A_{\alpha}^{\lambda} U_{\lambda}.$$

Les formules de dérivation covariantes d'un tenseur d'ordre quelconque s'en déduisent de façon évidente.

Nous rappelons, ce qui est d'ailleurs facile à vérifier sur la formule de définition, que les coefficients $\gamma_{\alpha\beta\lambda}$ sont anti-symétriques par rapport aux deux premiers indices.

Nous avons jusqu'ici affecté les éléments relatifs à des repères orthonormés adaptés d'indices soulignés. Or dans la suite, il ne sera question, pendant un certain temps, que de repères orthonormés adaptés. C'est pourquoi nous supprimerons provisoirement le soulignement des indices.

Tout ce que nous venons de dire pour V_4, peut évidemment s'appliquer à V_3 (ou à W_3). A tout repère orthonormé adapté de V_4 correspond un repère orthonormé arbitraire de V_3 : il s'agit du repère correspondant à la décomposition en carrés

$$d\dot{s}^2 = \sum_i (\dot{\omega}_i)^2$$

où

$$\dot{\omega}_i = \omega_i.$$

Nous pouvons alors appliquer à V_3 (ou W_3) les formules écrites ci-dessus. Nous munirons systématiquement du symbole · les éléments qui lui sont relatifs. Ainsi, $\dot{\nabla}_i$ désignera l'opérateur de différentiation covariante dans la métrique $d\dot{s}^2$, $\dot{R}_{ij,kl}$ son tenseur de courbure, etc...

Rappelons les formules, établies par Y. Thiry, exprimant les coefficients de rotation de V_4 en fonction de ceux de V_3 et des tenseurs

introduits, et celles donnant l'expression des tenseurs de courbure et de Ricci de V_4 en fonction des éléments de V_3

$$(3\text{-}6)\quad \begin{cases} \gamma_{ijk} = \dot{\gamma}_{ijk}, \\ \gamma_{i0k} = \gamma_{0ki} = \gamma_{ik0} = \dfrac{1}{2}\xi H_{ik}, \\ \gamma_{i00} = \dfrac{\partial_i \xi}{\xi}. \end{cases}$$

$$(3\text{-}7)\quad \begin{cases} R_{ij,\,kl} = \dot{R}_{ij,\,kl} - \dfrac{\xi^2}{4}(H_{ik}H_{jl} - H_{il}H_{jk}) - \dfrac{\xi^2}{2} H_{ij}H_{kl}, \\ R_{ij,\,l0} = -\dfrac{1}{2}(\xi \dot{\nabla}_l H_{ij} + 2\partial_l \xi H_{ij} - \partial_i \xi H_{jl} + \partial_j \xi H_{il}), \\ R_{l0,\,l0} = -\dfrac{1}{\xi}\dot{\nabla}_l(\partial_l \xi) + \dfrac{\xi^2}{4} H_{lr}H_{lr}. \end{cases}$$

$$(3\text{-}8)\quad \begin{cases} R_{ik} = \dot{R}_{ik} - \dfrac{1}{\xi}\dot{\nabla}_k(\partial_i \xi) - \dfrac{\xi^2}{2} H_{ij}H_{kj}, \\ R_{i0} = \dfrac{1}{2\xi^2}\dot{\nabla}_j(\xi^3 H_{ij}), \\ R_{00} = -\dfrac{1}{\xi}\dot{\Delta}\xi + \dfrac{\xi^2}{2} H^2. \end{cases}$$

où on a posé

$$H^2 = \frac{1}{2} H_{ij}H_{ij}.$$

II. Calcul des composantes de la variation du tenseur d'Einstein lorsque la métrique (1) est stationnaire.

Les équations en repère orthonormé. — Nous désignerons par $\delta \underline{S}$ la variation du tenseur d'Einstein une fois contravariant, une fois covariant. L'équation (1-8) s'écrit en repère orthonormé adapté

$$(3\text{-}9)\quad (\delta \underline{S})_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Big[(\Delta \underline{\Gamma})_{\alpha\beta} - 2R_{\alpha\lambda}\Gamma_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\beta}R_{\lambda\rho}\Gamma_{\lambda\rho} + \Big(S_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}k\delta_{\alpha\beta}\Big) + \nabla_\alpha Y_\beta + \nabla_\beta Y_\alpha - \delta_{\alpha\beta}\nabla_\lambda Y_\lambda\Big]$$

où

$$(3\text{-}10)\quad (\Delta \underline{\Gamma})_{\alpha\beta} = -\nabla_\lambda \nabla_\lambda \Gamma_{\alpha\beta} + R_{\alpha\lambda}\Gamma_{\beta\lambda} + R_{\beta\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda} - 2R_{\alpha\lambda,\,\beta\rho}\Gamma_{\lambda\rho}$$

et

$$(3\text{-}11)\quad Y_\alpha = \nabla_\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}.$$

Nous allons calculer les dérivées covariantes premières et secondes du tenseur $\underline{\Gamma}$ en fonction des éléments $\cdot$ et des tenseurs définis sur W_3. Les composantes Γ_{ij} définissent un tenseur d'ordre deux sur W_3, les Γ_{0i} un vecteur, et Γ_{00} un scalaire. L'indice o n'intervient pas dans le calcul des $\dot{\nabla}$.

Calcul des dérivées covariantes premières du tenseur $\underline{\Gamma}$. — On a d'abord

$$\nabla_i\Gamma_{ij} = \partial_i\Gamma_{ij} - \gamma_{iri}\Gamma_{rj} - \gamma_{jri}\Gamma_{ir} - \gamma_{i0i}\Gamma_{0j} - \gamma_{j0i}\Gamma_{0i}.$$

D'autre part, nous écrirons

$$\dot{\nabla}_i\Gamma_{ij} = \partial_i\Gamma_{ij} - \dot{\gamma}_{iri}\Gamma_{rj} - \dot{\gamma}_{jri}\Gamma_{ir}.$$

Compte tenu de (3-6), on a donc

$$\nabla_i\Gamma_{ij} = \dot{\nabla}_i\Gamma_{ij} - \frac{1}{2}\xi H_{ii}\Gamma_{0j} - \frac{1}{2}\xi H_{ji}\Gamma_{0i}.$$

Puis

$$\nabla_0\Gamma_{ij} = \partial_0\Gamma_{ij} - \gamma_{ir0}\Gamma_{rj} - \gamma_{jr0}\Gamma_{ir} - \gamma_{i00}\Gamma_{0j} - \gamma_{j00}\Gamma_{i0}.$$

s'écrit d'après (3-6)

$$\nabla_0\Gamma_{ij} = \partial_0\Gamma_{ij} - \frac{1}{2}H_{ir}\Gamma_{rj} - \frac{1}{2}H_{jr}\Gamma_{ri} - \frac{\partial_i\xi}{\xi}\Gamma_{0j} - \frac{\partial_j\xi}{\xi}\Gamma_{0i}.$$

De la même façon, on obtient successivement

$$\nabla_i\Gamma_{0i} = \dot{\nabla}_i\Gamma_{0i} - \frac{1}{2}\xi H_{ir}\Gamma_{ri} - \frac{1}{2}\xi H_{ii}\Gamma_{00},$$

$$\nabla_0\Gamma_{0i} = \partial_0\Gamma_{0i} + \frac{\partial_r\xi}{\xi}\Gamma_{ri} - \frac{\partial_i\xi}{\xi}\Gamma_{00} - \frac{1}{2}\xi H_{ir}\Gamma_{0r},$$

$$\nabla_i\Gamma_{00} = \partial_i\Gamma_{00} - \xi H_{ir}\Gamma_{0r},$$

$$\nabla_0\Gamma_{00} = \partial_0\Gamma_{00} + 2\frac{\partial_r\xi}{\xi}\Gamma_{0r}.$$

On en déduit immédiatement l'expression des Y_α

$$Y_i = \dot{\nabla}_i\Gamma_{ii} + \partial_0\Gamma_{0i} + \frac{\partial_r\xi}{\xi}\Gamma_{ri} - \frac{\partial_i\xi}{\xi}\Gamma_{00} - \xi H_{ii}\Gamma_{0i},$$

$$Y_0 = \dot{\nabla}_i\Gamma_{0i} + \partial_0\Gamma_{00} + 2\frac{\partial_r\xi}{\xi}\Gamma_{0r}.$$

Calcul des composantes du laplacien. — Le procédé de calcul employé étant le même que plus haut, on a

$$\nabla_i(\nabla_i\Gamma_{ij}) = \dot{\nabla}_i(\nabla_i\Gamma_{ij}) - \gamma_{i0i}\nabla_i\Gamma_{0j} - \gamma_{j0i}\nabla_i\Gamma_{0i}.$$

Soit, en tenant compte, d'une part de (3-6), d'autre part des

équations exprimant les dérivées premières de $\Gamma_{\alpha\beta}$

$$\nabla_l(\nabla_l\Gamma_{ij}) = \dot\nabla_l\Big(\dot\nabla_l\Gamma_{ij} - \frac{1}{2}\xi H_{il}\Gamma_{0j} - \frac{1}{2}\xi H_{jl}\Gamma_{0l}\Big)$$
$$- \frac{1}{2}\xi H_{il}\Big(\dot\nabla_l\Gamma_{0j} - \frac{1}{2}\xi H_{lr}\Gamma_{rj} - \frac{1}{2}\xi H_{jl}\Gamma_{00}\Big)$$
$$- \frac{1}{2}\xi H_{jl}\Big(\dot\nabla_l\Gamma_{0i} - \frac{1}{2}\xi H_{lr}\Gamma_{ri} - \frac{1}{2}\xi H_{il}\Gamma_{00}\Big).$$

Après réduction, il reste

(3-12) $$\nabla_l\nabla_l\Gamma_{ij} = \dot\nabla_l\dot\nabla_l\Gamma_{ij} - \xi H_{il}\dot\nabla_l\Gamma_{0j} - \xi H_{jl}\dot\nabla_l\Gamma_{0i}$$
$$- \frac{1}{4}\xi^2 H_{rl}(H_{il}\Gamma_{rj} + H_{jl}\Gamma_{ri}) + \frac{1}{2}\xi^2 H_{il}H_{jl}\Gamma_{00}$$
$$- \frac{1}{2}\dot\nabla_l(\xi H_{il})\Gamma_{0j} - \frac{1}{2}\dot\nabla_l(\xi H_{jl})\Gamma_{0i}.$$

De façon analogue, on a

$$\nabla_0\nabla_0\Gamma_{ij} = \partial_0(\nabla_0\Gamma_{ij}) - \gamma_{0l0}\nabla_l\Gamma_{ij} - \gamma_{il0}\Gamma_{0lj}$$
$$- \gamma_{jl0}\nabla_0\Gamma_{il} - \gamma_{i00}\nabla_0\Gamma_{0j} - \gamma_{j00}\nabla_0\Gamma_{0i},$$

qui s'écrit encore

$$\nabla_0\nabla_0\Gamma_{ij} = \partial_0\Big(\nabla_0\Gamma_{ij} - \frac{1}{2}\xi H_{ir}\Gamma_{rj} - \frac{1}{2}H_{jr}\Gamma_{ri} - \frac{\partial_i\xi}{\xi}\Gamma_{0j} - \frac{\partial_j\xi}{\xi}\Gamma_{0i}\Big)$$
$$+ \frac{\partial_i\xi}{\xi}\Big(\dot\nabla_l\Gamma_{ij} - \frac{1}{2}\xi H_{il}\Gamma_{0j} - \frac{1}{2}\xi H_{jl}\Gamma_{0i}\Big)$$
$$- \frac{1}{2}\xi H_{il}\Big(\partial_0\Gamma_{lj} - \frac{1}{2}\xi H_{lr}\Gamma_{rj} - \frac{1}{2}\xi H_{jr}\Gamma_{rl} - \frac{\partial_l\xi}{\xi}\Gamma_{0j} - \frac{\partial_j\xi}{\xi}\Gamma_{0l}\Big)$$
$$- \frac{1}{2}\xi H_{jl}\Big(\partial_0\Gamma_{li} - \frac{1}{2}\xi H_{lr}\Gamma_{ri} - \frac{1}{2}\xi H_{ir}\Gamma_{rl} - \frac{\partial_l\xi}{\xi}\Gamma_{0i} - \frac{\partial_i\xi}{\xi}\Gamma_{0l}\Big)$$
$$- \frac{\partial_i\xi}{\xi}\Big(\partial_0\Gamma_{0j} + \frac{\partial_l\xi}{\xi}\Gamma_{lj} - \frac{\partial_j\xi}{\xi}\Gamma_{00} - \frac{1}{2}\xi H_{jl}\Gamma_{0l}\Big)$$
$$- \frac{\partial_j\xi}{\xi}\Big(\partial_0\Gamma_{0i} + \frac{\partial_l\xi}{\xi}\Gamma_{li} - \frac{\partial_i\xi}{\xi}\Gamma_{00} - \frac{1}{2}\xi H_{il}\Gamma_{0l}\Big).$$

Après simplification, il vient

(3-13)
$$\nabla_0\nabla_0\Gamma_{ij} = \partial_{00}\Gamma_{ij} + \frac{\partial_i\xi}{\xi}\dot\nabla_l\Gamma_{ij} - \xi H_{ir}\partial_0\Gamma_{rj} - \xi H_{jr}\partial_0\Gamma_{ri}$$
$$- 2\frac{\partial_i\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{0j} - 2\frac{\partial_j\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{0i} + \Big(-\frac{1}{4}\xi^2 H_{il}H_{rl} - \frac{\partial_i\xi\partial_r\xi}{\xi^2}\Big)\Gamma_{rj}$$
$$+ \Big(-\frac{1}{4}\xi^2 H_{jl}H_{rl} - \frac{\partial_j\xi\partial_r\xi}{\xi^2}\Big)\Gamma_{ri} + \frac{1}{2}\xi^2 H_{il}H_{jr}\Gamma_{rl}$$
$$+ (\partial_j\xi H_{il} + \partial_i\xi H_{jl})\Gamma_{0l} + 2\frac{\partial_i\xi\partial_j\xi}{\xi^2}\Gamma_{00}.$$

Par addition de (3-12) et de (3-13) on obtient

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda\nabla_\lambda\Gamma_{ij} &= \partial_{00}\Gamma_{ij} + \frac{1}{\xi}\dot\nabla_l(\xi\dot\nabla_l\Gamma_{ij}) - \xi H_{il}(\dot\nabla_l\Gamma_{0j} + \partial_0\Gamma_{lj})\\ &\quad - \xi H_{jl}(\dot\nabla_l\Gamma_{0l} + \partial_0\Gamma_{li}) - 2\frac{\partial_i\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{0j} - 2\frac{\partial_j\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{0l}\\ &\quad - \Big(\frac{1}{2}\xi^2H_{il}H_{rl} + \frac{\partial_i\xi\partial_r\xi}{\xi^2}\Big)\Gamma_{rj} - \Big(\frac{1}{2}\xi^2H_{jl}H_{rl} + \frac{\partial_j\xi\partial_r\xi}{\xi^2}\Big)\Gamma_{ri}\\ &\quad + \frac{1}{2}\xi^2H_{il}H_{jr}\Gamma_{rl} - \frac{1}{2}\dot\nabla_l(\xi H_{il})\Gamma_{0j} - \frac{1}{2}\dot\nabla_l(\xi H_{jl})\Gamma_{0l}\\ &\quad + (\partial_j\xi H_{il} + \partial_i\xi H_{jl})\Gamma_{0l} + \Big(\frac{1}{2}\xi^2H_{il}H_{il} + 2\frac{\partial_i\xi\partial_j\xi}{\xi^2}\Big)\Gamma_{00}.\end{aligned}$$

Pour pouvoir en déduire l'expression de $(\Delta\Gamma)_{ij}$, nous devons maintenant calculer les termes faisant intervenir explicitement les tenseurs de courbure et de Ricci, soit :

$$R_{i\lambda}\Gamma_{\lambda j}, \qquad R_{j\lambda}\Gamma_{\lambda i}, \qquad \text{et} \qquad 2R_{i\lambda,\,j\varrho}\Gamma_{\lambda\varrho}.$$

On a

$$R_{i\lambda}\Gamma_{\lambda j} = R_{il}\Gamma_{lj} + R_{i0}\Gamma_{0j}.$$

Donc, d'après (3-8)

$$R_{i\lambda}\Gamma_{\lambda j} = \Big(\dot R_{il} - \frac{1}{\xi}\dot\nabla_l(\partial_i\xi) - \frac{\xi^2}{2}H_{ir}H_{lr}\Big)\Gamma_{lj} + \frac{1}{2\xi^2}\dot\nabla_l(\xi^3H_{il})\Gamma_{0j}.$$

On a de même

$$R_{i\lambda,\,j\varrho}\Gamma_{\lambda\varrho} = R_{il,\,jr}\Gamma_{lr} + (R_{i0,\,jl} + R_{il,\,j0})\Gamma_{0l} + R_{i0,\,j0}\Gamma_{00}.$$

Soit, d'après (3-7)

$$\begin{aligned}2R_{i\lambda,\,j\varrho}\Gamma_{\lambda\varrho} &= 2\Big[\dot R_{il,\,jr} - \frac{\xi^2}{4}(H_{ij}H_{lr} - H_{ir}H_{lj}) - \frac{\xi^2}{2}H_{ij}H_{jr}\Big]\Gamma_{lr}\\ &\quad - (\xi\dot\nabla_iH_{jl} + 2\partial_i\xi H_{jl} - \partial_j\xi H_{il} + \partial_i\xi H_{jl} + \xi\partial_jH_{il} + 2\partial_j\xi H_{il}\\ &\quad - \partial_i\xi H_{lj} + \partial_i\xi H_{ij})\Gamma_{0l} + 2\Big[-\frac{1}{\xi}\dot\nabla_j(\partial_i\xi) + \frac{\xi^2}{4}H_{il}H_{jl}\Big]\Gamma_{00}\end{aligned}$$

et, après réduction,

$$\begin{aligned}2R_{i\lambda,\,j\varrho}\Gamma_{\lambda\varrho} &= 2\Big(\dot R_{il,\,jr} - 3\frac{\xi^2}{4}H_{il}H_{jr}\Big)\Gamma_{rl} - (\xi\dot\nabla_iH_{jl} + \xi\dot\nabla_jH_{il} + 3\partial_i\xi H_{jl})\\ &\quad + 3\partial_jH_{il}\Gamma_{0l} + 2\Big(-\frac{1}{\xi}\dot\nabla_j(\partial_i\xi) + \frac{\xi^2}{4}H_{il}H_{jl}\Big)\Gamma_{00},\end{aligned}$$

On en déduit

$$
\begin{aligned}
(3\text{-}14)\quad -(\Delta\Gamma)_{ij} &= \partial_{00}\Gamma_{ij} + \frac{1}{\xi}\dot\nabla_i(\xi\dot\nabla_l\Gamma_{ij}) - \xi H_{il}(\dot\nabla_l\Gamma_{0j} + \partial_0\Gamma_{lj}) \\
&- \xi H_{jl}(\dot\nabla_l\Gamma_{0i} + \partial_0\Gamma_{li}) - 2\frac{\partial_i\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{0j} - 2\frac{\partial_j\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{0i} \\
&+ \left[-\dot R_{il} + \dot\nabla_l\left(\frac{\partial_i\xi}{\xi}\right)\right]\Gamma_{lj} + \left[-\dot R_{jl} + \dot\nabla_l\left(\frac{\partial_j\xi}{\xi}\right)\right]\Gamma_{li} \\
&+ (2\dot R_{il,\,jr} - \xi^2 H_{il}H_{jr})\Gamma_{rl} - \frac{1}{\xi}\dot\nabla_l(\xi^2 H_{il})\Gamma_{0j} - \frac{1}{\xi}\dot\nabla_l(\xi^2 H_{jl})\Gamma_{0i} \\
&- \frac{1}{\xi}\left[\dot\nabla_i(\xi^2 H_{jl}) + \dot\nabla_j(\xi^2 H_{il})\right]\Gamma_{0l} \\
&+ \left[-2\dot\nabla_j\left(\frac{\partial_i\xi}{\xi}\right) + \xi^2 H_{il}H_{jl}\right]\Gamma_{00}.
\end{aligned}
$$

Par un calcul semblable, on trouve

$$
\begin{aligned}
\nabla_l(\nabla_l\Gamma_{0i}) &= \dot\nabla_l\left(\dot\nabla_l\Gamma_{0i} - \frac{1}{2}\xi H_{lr}\Gamma_{ri} - \frac{1}{2}H_{il}\Gamma_{00}\right) \\
&- \frac{1}{2}\xi H_{lr}\left(\dot\nabla_l\Gamma_{ir} - \frac{3}{2}\xi H_{il}\Gamma_{0r}\right) - \frac{1}{2}\xi^2 H^2\Gamma_{0i} - \frac{1}{2}H_{il}\partial_l\Gamma_{00}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\nabla_0(\nabla_0\Gamma_{0i}) &= \partial_{00}\Gamma_{0i} + \frac{\partial_r\xi}{\xi}\dot\nabla_r\Gamma_{0i} + 2\frac{\partial_r\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{ri} - 2\frac{\partial_i\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{00} \\
&- \xi H_{ir}\partial_0\Gamma_{0r} - \partial_r\xi H_{rl}\Gamma_{li} - \partial_r\xi H_{il}\Gamma_{rl} - \frac{\partial_r\xi\partial_r\xi}{\xi^2}\Gamma_{0i} \\
&- 3\frac{\partial_i\xi\partial_r\xi}{\xi^2}\Gamma_{0r} + \frac{1}{4}\xi^2 H_{ir}H_{rl}\Gamma_{0l}.
\end{aligned}
$$

On en déduit par addition

$$
\begin{aligned}
\nabla_\lambda\nabla_\lambda\Gamma_{0i} &= \partial_{00}\Gamma_{0i} + \frac{1}{\xi}\dot\nabla_i(\xi\dot\nabla_l\Gamma_{0l}) + 2\frac{\partial_r\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{ri} - \xi H_{ir}\partial_0\Gamma_{0r} - 2\frac{\partial_i\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{00} \\
&- \xi H_{lr}\dot\nabla_l\Gamma_{ri} - \xi H_{il}\dot\nabla_l\Gamma_{00} - \frac{1}{2\xi^2}\dot\nabla_i(\xi^3 H_{lr})\Gamma_{ri} - \partial_r\xi H_{il}\Gamma_{rl} - \frac{1}{2}\dot\nabla_l(\xi H_{il})\Gamma_{00} \\
&- \left(\frac{\partial_r\xi\,\partial_r\xi}{\xi^2} + \frac{1}{2}\xi^2 H^2\right)\Gamma_{0i} - \left(3\frac{\partial_i\xi\,\partial_l\xi}{\xi^2} + \xi^2 H_{ir}H_{lr}\right)\Gamma_{0l}.
\end{aligned}
$$

D'autre part, les termes faisant intervenir les tenseurs de courbure ou de Ricci s'écrivent ici

$$-R_{\cdot 0}\Gamma_{\lambda i} - R_{\lambda l}\Gamma_{0\lambda} + 2R_{\cdot i,\,\rho 0}\Gamma_{\lambda\rho}.$$

Nous les évaluerons séparément. On a

$$R_{\cdot 0}\Gamma_{\lambda i} = R_{00}\Gamma_{0i} + R_{l0}\Gamma_{li}.$$

Soit, d'après (3-8)

$$R_{\lambda 0}\Gamma_{\lambda i} = \left[-\frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_l(\partial_i\xi) + \frac{\xi^2}{2}H^2\right]\Gamma_{0i} + \frac{1}{2\xi^2}\partial_r(\xi^3 H_{lr})\Gamma_{il}.$$

Le deuxième terme donne de la même facon

$$R_{\lambda i}\Gamma_{0\lambda} = \frac{1}{2\xi^2}\,\dot\nabla_l(\xi^3 H_{il})\Gamma_{00} + \left[\dot R_{il} - \frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_l(\partial_i\xi) - \frac{\xi^2}{2}H_{ir}H_{lr}\right]\Gamma_{0l}$$

et le troisième

$$2R_{\lambda i,\varrho 0} = \left[\frac{2}{\xi}\,\dot\nabla_l(\partial_i\xi) - \frac{\xi^2}{2}H_{ir}H_{lr}\right]\Gamma_{0l} + \left[\frac{1}{\xi^2}\,\nabla_l(\xi^3 H_{ir})\right]\Gamma_{rl}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}(3\text{-}15)\quad & (-\Delta\Gamma)_{0i}\\ &= \partial_{00}\Gamma_{0i} + \frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_l(\xi\,\dot\nabla_l\Gamma_{0i}) + 2\frac{\partial_r\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{ri} - \xi H_{ir}\partial_0\Gamma_{0r} - 2\frac{\partial_i\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{00}\\ &- \xi H_{ir}\dot\nabla_l\Gamma_{ri} - \xi H_{il}\dot\nabla_l\Gamma_{00} + \frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_l(\xi^2 H_{ir})\Gamma_{rl} + \left[\dot\nabla_l\left(\frac{\partial_i\xi}{\xi}\right) - \xi^2H^2\right]\Gamma_{0i}\\ &+ \left[-\dot R_{il} + 3\dot\nabla_l\left(\frac{\partial_i\xi}{\xi}\right) - \xi^2 H_{ir}H_{lr}\right]\Gamma_{0l} - \frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_l(\xi^2 H_{il})\Gamma_{00}.\end{aligned}$$

Enfin, on calcule encore de la même façon

$$\begin{aligned}\nabla_l(\nabla_l\Gamma_{00}) &= \dot\nabla_l(\partial_l\Gamma_{00}) - 2\xi H_{ir}\dot\nabla_l\Gamma_{0r} - \dot\nabla_l(\xi H_{lr})\Gamma_{0r}\\ &\quad + \frac{1}{2}\xi^2 H_{rl}H_{ml}\Gamma_{mr} - \xi^2H^2\Gamma_{00}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\nabla_0(\nabla_0\Gamma_{00}) &= \partial_{00}\Gamma_{00} + 4\frac{\partial_r\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{0r} + \frac{\partial_r\xi}{\xi}\partial_r\Gamma_{00}\\ &\quad + 2\frac{\partial_r\xi\,\partial_l\xi}{\xi^2}\Gamma_{rl} - 2\,\partial_r\xi\,H_{rl}\Gamma_{0l} - 2\frac{\partial_r\xi\,\partial_r\xi}{\xi^2}\Gamma_{00}.\end{aligned}$$

Par addition, il vient

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda\nabla_\lambda\Gamma_{00} &= \partial_{00}\Gamma_{00} + \frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_l(\xi\,\dot\nabla_l\Gamma_{00}) + 4\frac{\partial_r\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{0r} - 2H_{lr}\dot\nabla_l\Gamma_{0r}\\ &\quad + \left(2\frac{\partial_r\xi\,\partial_l\xi}{\xi^2} + \frac{1}{2}\xi^2 H_{rm}H_{lm}\right)\Gamma_{rl} - (\xi\,\dot\nabla_l H_{lr} + 3\partial_l\xi H_{lr})\,\Gamma_{0r}\\ &\quad - \left(2\frac{\partial_r\xi\,\partial_r\xi}{\xi^2} + \xi^2H^2\right)\Gamma_{00}.\end{aligned}$$

D'autre part, les termes complémentaires s'écrivent

$$-2R_{0\lambda}\Gamma_{0\lambda}+2R_{0\varrho,\,0\lambda}\Gamma_{\varrho\lambda}=2\left(-\frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_l(\partial_r\xi)+\frac{\xi^2}{4}H_{rm}H_{lm}\right)\Gamma_{rl}$$
$$-2\left(\frac{1}{2\xi^2}\,\dot\nabla_r(\xi^3H_{lr})\right)\Gamma_{0l}-2\left(-\frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_l(\partial_l\xi)+\frac{\xi^2}{2}H^2\right)\Gamma_{00}.$$

Et, après simplification

$$-2R_{0\lambda}\Gamma_{0\lambda}+2R_{0\varrho,\,0\lambda}\Gamma_{\varrho\lambda}=\left(-\frac{2}{\xi}\,\dot\nabla_l(\partial_r\xi)+\frac{1}{2}\,\xi^2H_{rm}H_{lm}\right)\Gamma_{rl}$$
$$-(\xi\,\dot\nabla_rH_{lr}+3\partial_r\xi H_{lr})\,\Gamma_{0l}+\left(\frac{2}{\xi}\,\dot\nabla_l(\partial_l\xi)-\xi^2H^2\right)\Gamma_{00}.$$

Au total, on a donc

(3-16)

$$(-\Delta\Gamma_{00})=\partial_{00}\Gamma_{00}+\frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_l(\xi\,\dot\nabla_l\Gamma_{00})+4\frac{\partial_r\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_{0r}-2\xi H_{lr}\dot\nabla_l\Gamma_{0r}$$
$$+2\left(-\dot\nabla_l\left(\frac{\partial_r\xi}{\xi}\right)+\frac{1}{2}\,\xi^2H_{rm}H_{lm}\right)\Gamma_{rl}+2\left(\dot\nabla_l\left(\frac{\partial_l\xi}{\xi}\right)-\xi^2H^2\right)\Gamma_{00}.$$

Calcul des dérivées de Y. — Seules nous serons utiles dans la suite les expressions complètes de $(\delta\underline{S})_{00}$ et de $(\delta\underline{S})_{0l}$. Il suffit donc de calculer ∇_lY_l, ∇_0Y_l, ∇_iY_0 et ∇_0Y_0. On a

$$\nabla_iY_j=\dot\nabla_iY_j-\gamma_{j0i}Y_0.$$

Par suite

$$\nabla_lY_l=\dot\nabla_lY_l,$$

ou, en remplaçant Y_l par sa valeur calculée plus haut

$$\nabla_lY_l=\dot\nabla_l\left(\dot\nabla_r\Gamma_{rl}+\partial_0\Gamma_{0l}+\frac{\partial_r\xi}{\xi}\,\Gamma_{rl}-\xi H_{lr}\Gamma_{0r}-\frac{\partial_l\xi}{\xi}\,\Gamma_{00}\right).$$

De même,

$$\nabla_0Y_i=\partial_0Y_i-\gamma_{il0}Y_l-\gamma_{i00}Y_0$$

entraîne

$$\nabla_0Y_i=\partial_0Y_l-\frac{1}{2}\,\xi H_{il}Y_l-\frac{\partial_i\xi}{\xi}\,Y_0.$$

On a aussi

$$\nabla_lY_0=\partial_lY_0-\gamma_{0li}Y_l.$$

C'est-à-dire

$$\nabla_lY_0=\partial_lY_0-\frac{1}{2}\,\xi H_{il}Y_l.$$

Par suite :

$$\nabla_0Y_l+\nabla_lY_0=\partial_0Y_.+\partial_lY_0-\xi H_{il}Y_l-\frac{\partial_i\xi}{\xi}\,Y_.$$

On en déduit, d'après (3-13) et toutes réductions faites

$$\nabla_0 Y_i + \nabla_i Y_0 = \partial_0 \dot{\nabla}_i \Gamma_{li} + \partial_{00}\Gamma_{0i} + \dot{\nabla}_i \dot{\nabla}_l \Gamma_{0l} + \dot{\nabla}_i \partial_0 \Gamma_{00} + \frac{\partial_r \xi}{\xi}\partial_0 \Gamma_{ri} - 2\frac{\partial_i \xi}{\xi}\partial_0 \Gamma_{00}$$
$$- 2\xi H_{il}\partial_0 \Gamma_{0l} + 2\frac{\partial_r \xi}{\xi}\dot{\nabla}_i \Gamma_{0r} - \xi H_{il}\dot{\nabla}_r \Gamma_{rl} - \frac{\partial_i \xi}{\xi}\dot{\nabla}_l \Gamma_{0l}$$
$$- \partial_r \xi H_{il}\Gamma_{rl} + \left(2\dot{\nabla}_i\left(\frac{\partial_r \xi}{\xi}\right) - 2\frac{\partial_i \xi \partial_r \xi}{\xi^2} - \xi^2 H_{il}H_{rl}\right)\Gamma_{0r} + \partial_i \xi H_{il}\Gamma_{00}.$$

Enfin $$\nabla_0 Y_0 = \partial_0 Y_0 + \frac{\partial_i \xi}{\xi} Y_i$$

s'écrit

$$\nabla_0 Y_0 = \partial_0(\dot{\nabla}_l \Gamma_{0l}) + \partial_{00}\Gamma_{00} + \frac{\partial_r \xi}{\xi}\left(\dot{\nabla}_l \Gamma_{lr} + 3\partial_0 \Gamma_{0r} + \frac{\partial_i \xi}{\xi}\Gamma_{ir} - \xi H_{rl}\Gamma_{0l} - \frac{\partial_r \xi}{\xi}\Gamma_{00}\right).$$

Calcul de $(\delta \underline{S})_{00}$ *et de* $(\delta \underline{S})_{0i}$. — On écrit la formule (3-9) respectivement pour les valeurs $\alpha = \beta = 0$ et $\alpha = 0$, $\beta = i$. Il vient

$$2(\delta \underline{S})_{00} = (\Delta \underline{\Gamma})_{00} - 2R_{0\lambda}\Gamma_{0\lambda} + \nabla_0 Y_0 - \nabla_l Y_l + R_{\lambda\varrho}\Gamma_{\lambda\varrho} + \left(S_{00} + \frac{1}{2}k\right)\Gamma$$

et $$2(\delta \underline{S})_{0i} = (\nabla \underline{\Gamma})_{0i} - 2R_{0\lambda}\Gamma_{i\lambda} + \nabla_i Y_0 + \nabla_0 Y_i + S_{0i}\Gamma.$$

Les différents termes du deuxième membre ont déjà été calculés. Il suffit d'effectuer leur somme et de grouper les termes semblables. Nous indiquerons seulement le résultat. On trouve

(3-17)

$$-2(\delta \underline{S})_{00} = \dot{\nabla}_l(\partial_0 \Gamma_{0l}) - \partial_0(\dot{\nabla}_l \Gamma_{0l}) + \frac{1}{\xi}\dot{\nabla}_l\left(\xi^2 \dot{\nabla}_r \frac{\Gamma_{rl}}{\xi} + \xi^2 \dot{\nabla}_l \frac{\Gamma_{00}}{\xi}\right)$$
$$+ \frac{\partial_r \xi}{\xi}\partial_0 \Gamma_{0r} - 3\xi H_{lr}\dot{\nabla}_l \Gamma_{0r} - 2\xi \dot{\nabla}_l(H_{lr})\Gamma_{0r} - 3\partial_i \xi H_{lr}\Gamma_{0r}$$
$$+ \xi^2 H_{lm}H_{rm}\Gamma_{rl} - \xi^2 H^2 \Gamma_{00} - R_{\lambda\varrho}\Gamma_{\lambda\varrho} - \left(S_{00} + \frac{1}{2}k\right)\Gamma$$

et

(3-18)

$$-2(\delta \underline{S})_{0i} = -\partial_0(\dot{\nabla}_l \Gamma_{li}) - \dot{\nabla}_i(\partial_0 \Gamma_{00}) + \frac{\partial_r \xi}{\xi}\partial_0 \Gamma_{ri} + \xi H_{ir}\partial_0 \Gamma_{0r}$$
$$- \dot{\nabla}_l(\dot{\nabla}_l \Gamma_{0l}) + \dot{\nabla}_l(\dot{\nabla}_i \Gamma_{0l}) - \dot{R}_{il}\Gamma_{0l}$$
$$+ \frac{1}{\xi^2}\dot{\nabla}_r\left[\xi^3\left(\dot{\nabla}_r \frac{\Gamma_{0i}}{\xi} - \dot{\nabla}_i \frac{\Gamma_{0r}}{\xi} + H_{lr}\Gamma_{il} + H_{il}\Gamma_{rl} - H_{ir}\Gamma_{00}\right)\right]$$
$$- S_{0i}\Gamma.$$

Calcul de $(\delta \underline{S})^0_0$ *en repère naturel.* — Nous rétablirons désormais le soulignement des indices pour les composantes en repère orthonormé.

En même temps, nous placerons les indices inférieurement et supérieurement de façon à satisfaire à la convention d'Einstein classique. Recopiant les formules (3-17) et (3-18), il vient

$$(3\text{-}19)\quad -2\,(\delta\underline{S})_{00} = \dot\nabla_l\,(\partial_0\Gamma_0^{\ l}) - \partial_0(\dot\nabla_l\Gamma_0^{\ l}) + \frac{\partial_r\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_0^{\ r}$$
$$+\frac{1}{\xi}\dot\nabla_l\left(\xi^2\dot\nabla_r\left[\frac{\Gamma^{rl}}{\xi}\right] + \xi^2\dot\nabla^l\left[\frac{\Gamma_{00}}{\xi}\right]\right) - 3\xi H^l_{\ r}\dot\nabla_l\Gamma_0^{\ r} - 2\xi\dot\nabla_l(H^l_{\ r})\Gamma_0^{\ r}$$
$$-3\,\partial_l\xi\,H^l_{\ r}\Gamma_0^{\ r} + \xi^2 H_{lm}\ {}_r^{\ m}\Gamma^{rl} - \xi^2H^2\Gamma_{00}$$
$$-R_{\lambda 0}\Gamma_{\lambda 0} - \left(S_{00} + \frac{1}{2}k\right)\Gamma$$

et

$$(3\text{-}20)\quad -2\,(\delta\underline{S})^i_0 = -\partial_0(\dot\nabla_l\Gamma^{li}) - \dot\nabla_i\,(\partial_0\Gamma_{00}) + \frac{\partial_r\xi}{\xi}\partial_0\Gamma^{ri} + \xi H^i_{\ r}\partial_0\Gamma_0^{\ r}$$
$$-\dot\nabla^i(\dot\nabla_l\Gamma_0^{\ l}) + \dot\nabla_l(\dot\nabla^i\Gamma_0^{\ l}) - \dot R^i_{\ l}\Gamma_0^{\ l}$$
$$+\frac{1}{\xi^2}\dot\nabla^r\left[\xi^3\left(\dot\nabla_r\left[\frac{\Gamma_0^{\ i}}{\xi}\right] - \dot\nabla^i\left[\frac{\Gamma_{0r}}{\xi}\right] + H_{lr}\Gamma^{li} + H^i_{\ l}\Gamma_r^{\ l} - H^i_{\ r}\Gamma_{00}\right)\right]$$
$$-S_0^{\ i}\Gamma.$$

Nous avons fait le calcul en supposant la métrique de V_4 elliptique. On obtient les formules correspondantes en métrique hyperbolique par application de la règle suivante : à tout indice $j = 1, 2, 3$, contravariant correspond une multiplication par i et à tout indice j covariant une multiplication par $-i$, à l'indice 0, une multiplication par 1. Les formules (3-19) et (3-20) demeurent évidemment inchangées dans une telle transformation.

Les formules de changement de repère, appliquées à $(\delta S)^0_0$ s'écrivent

$$(\delta\underline{S})^0_0 = A_\lambda^{\ 0}A^\mu_{\ 0}\,(\delta S)^\lambda_\mu$$

ou, d'après (3-5)

$$(\delta\underline{S}^0_0) = (\delta\underline{S})_{00} - \xi\varphi^l\,(\delta\underline{S})_{0l}.$$

Pour faciliter le calcul, nous partagerons le deuxième membre en une somme de quatre termes que nous étudierons séparément. Nous écrirons

$$-2\,(\delta\underline{S})^0_0 = A + B + C + D.$$

A comprend la première ligne de $(\delta\underline{S})_{00}$ et le produit par $-\xi\varphi_i$ de la première ligne de $-2\,(\delta\underline{S})^i_0$

$$A = \dot\nabla_l(\partial_0\Gamma_0^{\ l}) - \partial_0(\dot\nabla_l\Gamma_0^{\ l}) + \frac{\partial_r\xi}{\xi}\partial_0\Gamma_0^{\ r}$$
$$+\xi\varphi_i\left[\partial_0(\dot\nabla_l\Gamma^{li}) + \dot\nabla_i(\partial_0\Gamma_{00}) - \frac{\partial_r\xi}{\xi}\partial_0\Gamma^{ri} - \xi H^i_{\ r}\partial_0\Gamma_r^{\ 0}\right]$$

B est le produit de la deuxième ligne de $-2(\delta\underline{S})^i_{\underline{0}}$ par $-\xi\varphi_i$

$$B = \xi\varphi_l[\dot\nabla^i(\dot\nabla_l\Gamma^l_{\underline{0}}) - \dot\nabla_l(\dot\nabla^i\Gamma^l_{\underline{0}}) + \dot R^i_l\Gamma^l_{\underline{0}}]$$

C comprend la somme des lignes 2 et 3 dans la formule donnant $-2(\delta\underline{S})^i_{\underline{0}}$ et du produit par $-\xi\varphi_i$ de la troisième ligne de $-2(\delta\underline{S})^i_{\underline{0}}$

$$\begin{aligned} C = {} & \frac{1}{\xi}\dot\nabla_l\left[\xi^2\left(\dot\nabla_r\frac{\Gamma^{rl}}{\xi} + \dot\nabla^l\frac{\Gamma_{\underline{00}}}{\xi}\right)\right] - 3\xi H^l_{\ r}\dot\nabla_l\Gamma^r_{\underline{0}} - 2\xi\dot\nabla_l H^l_{\ r}\Gamma^r_{\underline{0}} \\ & - 3\partial_l\xi H^l_{\ r}\Gamma^r_{\underline{0}} + \xi^2 H_{lm}H_r^{\ m}\Gamma^{rl} - \xi^2H^2\Gamma_{\underline{00}} \\ & - \frac{1}{\xi}\varphi_l\dot\nabla_r\left[\xi^3\left(\dot\nabla^r\frac{\Gamma^l_{\underline{0}}}{\xi} - \dot\nabla_l\frac{\Gamma^r_{\underline{0}}}{\xi} + H_l^{\ r}\Gamma^{il} + H^i_{\ l}\Gamma^{rl} - H^{ir}\Gamma_{\underline{00}}\right)\right] \end{aligned}$$

Enfin D, formé par les termes restants, s'écrit immédiatement

$$D = \left(-S_{\underline{00}} - \frac{1}{2}k + \xi\varphi_i S^i_{\underline{0}}\right)\Gamma - R_{\lambda\underline{0}}\Gamma^{\lambda\underline{0}}.$$

Avant de passer au repère naturel, nous transformerons un peu l'expression de C. Nous désignerons par C_1 les termes qui, dans C, proviennent de $\xi\varphi^i(\delta\underline{S})_{\underline{0}i}$. Appliquant la formule de différentiation d'un produit, on obtient

$$\begin{aligned} C_1 = {} & \frac{1}{\xi}\dot\nabla_r\left[\xi^3\varphi^i\left(\dot\nabla^r\frac{\Gamma^i_{\underline{0}}}{\xi} - \dot\nabla^i\frac{\Gamma^r_{\underline{0}}}{\xi} + H_l^{\ r}\Gamma^{il} + H^i_{\ l}\Gamma^{rl} - H^{ir}\Gamma_{\underline{00}}\right)\right] \\ & - \xi^2\left(\dot\nabla^r\left[\frac{\Gamma^i_{\underline{0}}}{\xi}\right] - \dot\nabla^i\left[\frac{\Gamma^r_{\underline{0}}}{\xi}\right] + H_l^{\ r}\Gamma^{il} + H^i_{\ l}\Gamma^{rl} - H^{ir}\Gamma_{\underline{00}}\right)\dot\nabla_r\varphi_i. \end{aligned}$$

Or on a

$$\dot\nabla^l\left[\frac{\Gamma^r_{\underline{0}}}{\xi}\right]\dot\nabla_r\varphi_l = \nabla^r\left[\frac{\Gamma^l_{\underline{0}}}{\xi}\right]\dot\nabla_l\varphi_r.$$

Soit

$$\left(\dot\nabla_r\frac{\Gamma^i_{\underline{0}}}{\xi} - \dot\nabla^i\frac{\Gamma^r_{\underline{0}}}{\xi}\right)\dot\nabla_r\varphi_i = \dot\nabla^r\frac{\Gamma^l_{\underline{0}}}{\xi}(\dot\nabla_r\varphi_i - \dot\nabla_i\varphi_r) = H_{rl}\dot\nabla^r\frac{\Gamma^l_{\underline{0}}}{\xi}.$$

De même, en tenant compte de l'antisymétrie de H_{il}

$$H_{il}\Gamma^{rl}\dot\nabla_r\varphi^l = -H_{lr}\Gamma^{il}\dot\nabla_i\varphi^r.$$

D'où on déduit

$$(H_l^{\ r}\Gamma^{il} + H^i_{\ l}\Gamma^{rl})\dot\nabla_r\varphi_i = H_l^{\ r}\Gamma^{il}(\dot\nabla_r\varphi_i - \dot\nabla_i\varphi_r) = H_{lr}H^r_{\ i}\Gamma^{il}.$$

Enfin

$$H^{ir}\dot\nabla_r\varphi_i = \frac{1}{2}H_{ir}H_{rl} = -H^2.$$

Compte tenu de ces résultats, il vient

$$C_1 = -\frac{1}{\xi}\dot{\nabla}_r\left[\xi^3\varphi_i\left(\dot{\nabla}^r\frac{\Gamma_{\underline{0}}^i}{\xi} - \dot{\nabla}^i\frac{\Gamma_{\underline{0}}^r}{\xi} + H_i{}^r\Gamma^{ii} + H^i{}_i\Gamma^{ri} - H^{ir}\Gamma_{\underline{00}}\right)\right]$$
$$+ \xi^2 H_{ir}H^r{}_i\Gamma^{ii} + \xi^2 H_{ii}\dot{\nabla}^i\left(\frac{\Gamma_{\underline{0}}^i}{\xi}\right) + \xi^2 H^2\Gamma_{\underline{00}}.$$

On en déduit

$$C = \frac{1}{\xi}\dot{\nabla}_i h^i$$

où on a posé

$$h^i = \xi^2\left(\dot{\nabla}_r\left(\frac{\Gamma^{ri}}{\xi}\right) + \dot{\nabla}^i\left(\frac{\Gamma_{\underline{00}}}{\xi}\right) - 2H^i{}_r\Gamma_{\underline{0}}^r\right)$$
$$-\xi^3\varphi_i\left(\dot{\nabla}_i\left(\frac{\Gamma_{\underline{0}}^i}{\xi}\right) - \dot{\nabla}^i\left(\frac{\Gamma_{\underline{0}}^i}{\xi}\right) + H_r{}^i\Gamma^{ir} - H^{ii}\Gamma_{\underline{00}} + H^i{}_r\Gamma^{ri}\right).$$

Nous allons maintenant exprimer A, B, C, D en fonction des composantes, dans le repère naturel, des différents tenseurs qui interviennent. Nous introduirons systématiquement les tenseurs, définis canoniquement sur W_3, introduits au début de ce chapitre, soit

$$\dot{\Gamma}^{ij} = \Gamma^{ij}, \qquad V^i = \frac{\Gamma_{\underline{0}}^i}{\xi}, \qquad u = \frac{\Gamma_{\underline{00}}}{\xi^2}.$$

L'abaissement des indices du tenseur $\underline{\dot{\Gamma}}$ ou du vecteur V dont les composantes contravariantes sont données ci-dessus se feront toujours à l'aide de la métrique $d\dot{s}^2$.

Les formules de changement de repère, appliquées au tenseur $\underline{\Gamma}$ s'écrivent

$$\Gamma^{ij} = A^i{}_i A^j{}_j \dot{\Gamma}^{ij}$$

De la même façon, on a

$$\Gamma_{\underline{0}}^i = A_i{}^i V^i$$

et

$$\Gamma_{\underline{00}} = u.$$

D'autre part, f étant une fonction arbitraire, on a manifestement

$$\partial_{\underline{0}} f = \frac{1}{\xi}\partial_0 f$$

et

$$\partial_i f = A_i{}^i(\partial_i f - \varphi_i\partial_0 f).$$

On en déduit sans peine toutes les autres formules de changement de repère. Par exemple

$$\dot{\nabla}_k \Gamma_{ij} = A^k_k A^i_i A^j_j (\dot{\nabla}_k \dot{\Gamma}_{ij} - \varphi_k \partial_0 \dot{\Gamma}_{ij}).$$

Cela nous permet de calculer A, B, C et D

$$A = \dot{\nabla}_l \left(\frac{1}{\xi} \partial_0 V^l \right) - \varphi_l \partial_0 \left(\frac{1}{\xi} \partial_0 V^i \right) - \frac{1}{\xi} \partial_0 (\dot{\nabla}_l V^l - \varphi_l \partial_0 V^l) + \frac{\partial_l \xi}{\xi^2} \partial_0 V^i$$
$$+ \varphi_i \partial_0 (\dot{\nabla}_l \dot{\Gamma}^{il} - \varphi_l \partial_0 \dot{\Gamma}^{il}) + \xi \varphi^i \left[\dot{\nabla}_i \left(\frac{1}{\xi} \partial_0 u \right) - \varphi_i \frac{1}{\xi} \partial_{00} u \right]$$
$$- \varphi_i \frac{\partial_l \xi}{\xi} \partial_0 \Gamma^{il} - \xi \varphi^l H_{ir} \partial_0 V^r.$$

En effectuant les calculs, il vient

$$A = \varphi_i \partial_0 \left[\dot{\nabla}_l \dot{\Gamma}^{il} - \varphi_l \partial_0 \dot{\Gamma}^{il} - \frac{\partial_l \xi}{\xi} \dot{\Gamma}^{il} - \xi H^i_r V^r + \dot{\nabla}^i u - \varphi^i \partial_0 u - \frac{\partial^i \xi}{\xi} u \right]$$

De même, on a

$$B = \xi \varphi^i [\dot{\nabla}_i (\dot{\nabla}_l V^l - \varphi_l \partial_0 V^l) - \varphi_i \partial_0 (\dot{\nabla}_l V^l - \varphi_l \partial_0 V^l) - \dot{\nabla}_l (\dot{\nabla}_i V^l - \varphi_i \partial_0 V^l)$$
$$+ \varphi_l \partial_0 (\dot{\nabla}_i V^l - \varphi_i \partial_0 V^l) - \dot{R}_{il} V^l].$$

Mais, d'après l'identité de Ricci écrite pour W_3, on a

$$\dot{\nabla}_i (\dot{\nabla}_l V^l) - \dot{\nabla}_l (\dot{\nabla}_i V^l) = \dot{R}_{il} V^l.$$

Un calcul simple montre alors que

$$B = \partial_0 (\xi \varphi^l H_{li} V^l).$$

En repère naturel, le vecteur h de W_3 introduit dans le calcul de C a pour composantes contravariantes

$$(3\text{-}21) \quad h^i = \xi^2 \left[\dot{\nabla}_r \frac{\dot{\Gamma}^{rl}}{\xi} - \varphi_r \partial_0 \frac{\dot{\Gamma}^{rl}}{\xi} + \dot{\nabla}^i \left(\frac{u}{\xi} \right) - \varphi^i \partial_0 \left(\frac{u}{\xi} \right) - 2 \xi H^l_r V^r \right]$$
$$- \xi^3 \varphi_i [\dot{\nabla}^l V^i - \varphi^i \partial_0 V^i - \dot{\nabla}^i V^l + \varphi^i \partial_0 V^l + H_r{}^l \dot{\Gamma}^{ir} + H^i_r \dot{\Gamma}^{rl} - \xi^2 H^{il} u].$$

Mais

$$C = \frac{1}{\xi} \dot{\nabla}_l h^l - \frac{1}{\xi} \varphi_l \partial_0 h^l$$

entraîne, après simplification du terme $\varphi_l h^l$

$$C = \frac{1}{\xi} \dot{\nabla}_l h^l$$
$$- \varphi_l \partial_0 \left(\dot{\nabla}_r \dot{\Gamma}^{rl} - \varphi_r \partial_0 \dot{\Gamma}^{rl} - \frac{\partial_r \xi}{\xi} \dot{\Gamma}^{rl} + \dot{\nabla}^l u - \varphi^l \partial_0 u - \frac{\partial_l \xi}{\xi} u - 2 \xi^2 H^l_r V^r \right).$$

Enfin, on a évidemment

$$D = -\left(S_0^0 + \frac{1}{2}k\right)\Gamma - R_\mu^\lambda \Gamma_\lambda^\mu.$$

On constate que

$$A + B + C = \frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_i h^i.$$

Par conséquent,

$$-2(\delta\underline{S})_0^0 = \frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_i h^i - \left(S_0^0 + \frac{1}{2}k\right)\Gamma - R_\mu^\lambda \Gamma_\lambda^\mu.$$

Exprimons enfin R_μ^λ en fonction du tenseur d'Einstein par la formule

$$R_\mu^\lambda = S_\mu^\lambda - \frac{1}{2}\delta_\mu^\lambda(S + k).$$

Il vient

$$(3\text{-}22)\qquad (\delta\underline{S})_0^0 = -\frac{1}{2\xi}\,\dot\nabla_i h^i + \frac{1}{2}\left(S_0^0 - \frac{1}{2}S\right)\Gamma + \frac{1}{2}S_\mu^\lambda \Gamma_\lambda^\mu.$$

III. Singularités du champ de gravitation à l'intérieur des masses

Supposons maintenant la métrique (1) solution des équations de la relativité générale écrites dans le cas extérieur. Cela signifie

$$S_\mu^\lambda = 0$$

(3-22) se réduit alors à

$$(\delta\underline{S})_0^0 = -\frac{1}{2\xi}\,\dot\nabla_i h^i$$

et les équations d'Einstein entraînent

$$(3\text{-}23)\qquad \dot\nabla_i h^i = -2\xi\chi E_0^0,$$

où E_0^0 désigne, puisque $T_{\lambda\mu} = 0$, la variation du tenseur impulsion énergie étudiée dans le chapitre II.

Soit $\mathcal{C}$ une chaîne différentiable de W_3, se dimension 3, de bord $\partial\mathcal{C}$. Nous désignons par vol l'élément de volume de W_3. On obtient, par intégration de (3-23) sur $\mathcal{C}$

$$(3\text{-}24)\qquad -2\chi \int_{\mathcal{C}} \xi E_0^0 \,\mathrm{vol} = \mathrm{flux}_{\partial\mathcal{C}} h.$$

Étude du signe de E_0^0 *pour une variété* W_3 *orientée dans l'espace.* — Dans un schéma matière pure ou fluide parfait, nous avons donné pour E_0^0, dans le chapitre II, l'expression

$$E_0^0 = r_1 u_0 u^0 - p_1.$$

Or on a

$$u_0 u^0 = g^{00}(u_0)^2 + g^{0i} u_0 u_i$$

et

$$g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = g^{00}(u_0)^2 + 2g^{0i} u_0 u_i + g^{ij} u_i u_j = 1.$$

Par élimination du terme $g^{i0} u_0 u_i$, on obtient

$$u_0 u^0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(g^{00}(u_0)^2 - g^{ij} u_i u_j).$$

Pour une variété W_3 partout orientée dans l'espace, on sait que g^{00} est positif, et la forme quadratique g^{ij} définie négative. Par suite, on a

$$u_0 u^0 > \frac{1}{2}.$$

Dans un schéma matière pure, $E_0^0 = \rho_1 u_0 u^0$ est donc une quantité strictement positive si $\rho_1 \neq 0$.

Dans un schéma fluide parfait, on a, en tenant compte de l'équation d'état

$$E_0^0 = [(\varphi'(0) + 1) u_0 u^0 - 1] p_1.$$

Cette quantité est encore strictement positive si $p_1 \neq 0$ puisque, par hypothèse, $\varphi'(0)$ est supérieur à 1.

Démonstration des théorèmes de singularité. — Revenons maintenant à la formule (3-24) où nous supposerons E_0^0 strictement positive en présence de matière, ce qui est le cas dans les deux schémas matériels étudiés.

Considérons un tube d'univers de V_4, limité par une hypersurface S engendrée par des lignes de temps. Supposons la section W_3 partout orientée dans l'espace. On considère le champ de tenseurs $\underline{\Gamma}$ satisfaisant, à l'intérieur de S aux équations associées aux équations d'Einstein du cas intérieur où $r = 0$, $r_1 \neq 0$. Dans le voisinage de S, nous avons vu que ce champ induit un champ $\underline{\Gamma}'$ satisfaisant aux équations aux variations associées aux équations d'Einstein du cas extérieur, et se raccordant avec le premier le long de S. Sur S, $\underline{\Gamma}$ et $\underline{\Gamma}'$ ont même valeur, par suite, les vecteurs h et h' définis par (3-21) et relatifs à ces deux champs sont égaux sur S.

Supposons que Γ' puisse être régulièrement prolongé à tout l'intérieur de S. La section d'espace W_3 détermine sur S un domaine D à deux dimensions. Nous appliquons la formule (3-24) sucessivement à Γ et Γ' en prenant pour $\mathcal{C}$ le domaine de W_3 intérieur à D

Pour le champ intérieur Γ,

$$\text{flux}_D\, h = -2\chi \int_{\mathcal{C}} \xi E_0^0 \,\text{vol}$$

est strictement positif. Pour le champ extérieur Γ' supposé prolongé régulièrement,

$$E_0^0 = 0, \qquad \text{et} \qquad \text{flux}_D\, h' = 0,$$

ce qui est impossible puisque h et h' sont égaux sur D. D'où le

THÉORÈME I. — *Étant donnés, à l'intérieur et au voisinage d'un tube d'univers limité par une hypersurface* S *engendrée par les lignes de temps, un champ de gravitation stationnaire défini par la métrique* $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$, *et à l'intérieur de* S *un deuxième champ de gravitation, intérieur, défini par la métrique*

$$\overline{ds}^2 = \overline{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

où

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}, \tag{3-25}$$

les $\gamma_{\alpha\beta}$ *étant petits, de telle sorte que les termes du second ordre en* $\gamma_{\alpha\beta}$ *puissent être négligés, le champ de gravitation extérieur se raccordant avec ce dernier le long de* S *ne peut être prolongé régulièrement à tout l'intérieur de* S.

DÉFINITION. — *Nous dirons qu'un champ de gravitation est quasi-stationnaire si les coefficients* $\overline{g}_{\alpha\beta}$ *de la métrique que le définissent peuvent se mettre sous la forme* (3-25), *où les* $g_{\alpha\beta}$ *sont les coefficients définissant une métrique stationnaire, et où les* $\gamma_{\alpha\beta}$ *sont petits, de telle sorte qu'on puisse négliger les termes du second ordre en* $\gamma_{\alpha\beta}$. *Le champ de gravitation défini par la métrique* $g_{\alpha\beta}$ *sera dit champ stationnaire associé au premier.*

Si on suppose maintenant que le champ de gravitation stationnaire donné, correspondant à la métrique $g_{\alpha\beta}$ satisfait aux équations d'Einstein du cas intérieur à l'intérieur de S et du cas extérieur à l'extérieur de S, les hypothèses faites sur le deuxième champ étant inchangées, la partie principale $g_{\alpha\beta}$ de ce deuxième champ ne peut être prolongée régulièrement à tout l'intérieur de S, d'après un théorème démontré par A. Lichnérowicz. Groupant ces deux résultats, on en déduit le

THÉORÈME II. — *Étant donné un champ de gravitation intérieur quasi-stationnaire, limité à une hypersurface* S *engendrée par les lignes de temps, le champ de gravitation extérieur se raccordant avec lui sur* S *ne peut être prolongé régulièrement à tout l'intérieur de* S.

Univers à espace compact orientable. — Considérons un espace temps V_4 admettant une section W_3 compacte orientée dans l'espace. Nous dirons que cet espace temps définit un modèle d'univers si sa métrique satisfait aux équations d'Einstein des cas extérieur et intérieur, avec raccordement le long d'hypersurfaces S engendrées par les lignes de temps. La constante cosmologique est supposée non nulle. Supposons donné un modèle d'univers quasi-stationnaire, dont la métrique stationnaire associée satisfait, dans V_4, les équations d'Einstein du cas extérieur.

De la relation (3-23), on déduit par intégration sur W_3

$$\int_{W_3} \xi E_0^0 \, \mathrm{vol} = 0.$$

Or E_0^0 est strictement positif dans certains domaines de W_3, nul sur le complémentaire. On a donc

THÉORÈME III. — *Il ne peut exister de modèle d'univers quasi-stationnaire associé à un univers stationnaire extérieur à section d'espace compacte orientée dans l'espace.*

Ce théorème s'applique en particulier à l'univers de Sitter.

Généralisation du théorème de singularité en théorie de Jordan-Thiry. — Les notations employées sont les mêmes que dans le chapitre II. Soit $W_4(x^4 = 0)$ une section dans un système de coordonnées adaptées déterminé. Nous dirons que le champ unitaire défini sur V_5 est stationnaire si W_4 admet un groupe d'isométries globales à un paramètre qui laisse invariant g_{44} et le potentiel vecteur φ_a. La variété W_4 est supposée être homéomorphe, par un homéomorphisme de classe C_4, au produit topologique d'une variété V_3 de classe C^4 et de la droite réelle R, les trajectoires du groupe s'appliquant sur les droites facteur. Nous supposerons les coordonnées adaptées à ce groupe de W_4. Dans ces conditions, V_5 qui est homéomorphe à $V_3 \times R \times T^1$ est homéomorphe à $V_4' \times T^1$, où V_4' désigne le produit topologique $V_3 \times T^1$. Dans le système de coordonnées choisi, les lignes $x^i = C^{te}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) sont celles qui dans le dernier homéomorphisme viennent s'appliquer sur les droites facteur. Ce sont les trajectoires d'un groupe d'isométries globales de V_5. Nous les supposerons orientées

$d\sigma^2 < 0$ et nous les appellerons lignes de temps de V_5. Nous désignerons par $\vec{\xi}$ le vecteur de Killing, générateur infinitésimal de ce nouveau groupe et par ξ sa longueur. Dans le système de coordonnées choisi, on a $g_{00} = \xi^2$.

Enfin nous poserons

$$g_{0l} = \xi^2 \varphi_i, \qquad H_{ij} = \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i.$$

Les variétés $W_4'(x^0 = C^{te})$ seront supposées globalement définies sur V_5 et munies de la métrique définie négative de coefficients

$$\dot{g}^{ij} = g^{ij}.$$

Le calcul de $(\delta \underline{S})_0^0$ est alors inchangé. On obtient

$$-2(\delta \underline{S})_0^0 = \frac{1}{\xi} \dot{\nabla}_i h^i - \frac{2}{3}\left(S_0^0 + \frac{1}{2}k\right)\Gamma - R_\mu^\lambda \Gamma_\lambda^\mu.$$

Mais dans un espace de dimension 5,

$$S_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}(R + k)$$

entraîne

$$R_{\lambda\mu} = S_{\lambda\mu} - \frac{1}{3} g_{\lambda\mu}(S + k).$$

Donc

$$-2(\delta \underline{S})_0^0 = \frac{1}{\xi} \dot{\nabla}_i h^i - \frac{2}{3}\left(S_0^0 - \frac{1}{2}S\right)\Gamma - S_\mu^\lambda \Gamma_\lambda^\mu$$

On en déduit, comme dans le cas quadridimentionnel le théorème

THÉORÈME. — *Étant donné un champ unitaire intérieur quasi-stationnaire, limité à une hypersurface Σ engendrée par les lignes de temps, le champ unitaire extérieur se raccordant avec lui ne peut être prolongé régulièrement à tout l'intérieur de Σ.*

CHAPITRE IV

UN THÉORÈME DE CONSERVATION

Préliminaires.

Les équations de la relativité générale peuvent être déduites du principe variationnel suivant : chaque phénomène physique observable est défini par un nombre N de variables d'état z^a ($a = 1, 2, \ldots, N$), fonctions des x^λ. Il lui correspond une quantité scalaire φ_I, qui est une fonction déterminée des z^a, des $\partial_\lambda z^a$ et des $g_{\lambda\mu}$. On désigne par φ la somme des quantités φ_I relatives à tous les phénomènes étudiées; alors l'intégrale

$$I = \int \varphi \sqrt{-\text{dét}\,(g_{\alpha\beta})}\, dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3$$

est stationnaire pour toute variation des variables d'état et des $g_{\alpha\beta}$.

Nous désignerons par (S) le système des équations d'Euler exprimant la stationnarité de I.

Le système aux variations (au sens de Poincaré), (S'), associé à (S) et à une solution donnée de (S) peut lui-même être interprété comme étant le système des équations d'Euler exprimant la stationnarité d'une certaine intégrale J : si on désigne par $z^a_{(1)}$ et $\gamma_{\alpha\beta}$ les variations δz^a et $\delta g_{\alpha\beta}$ des variables d'état z^a et des coefficients $g_{\alpha\beta}$, par $L\sqrt{|\text{dét}\,(g_{\alpha\beta})|}$ le lagrangien quadratique, c'est-à-dire la quantité scalaire obtenue en prenant les termes d'ordre 2 par rapport à l'ensemble de ces variations dans le développement de $\varphi\sqrt{-\text{dét}\,(g_{\alpha\beta})}$ on a

$$J = \int L \sqrt{-\text{dét}\,(g_{\alpha\beta})}\, dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3.$$

Supposons maintenant que la solution donnée de (S) corresponde à un univers stationnaire. En coordonnées adaptées, les variables d'état et les coefficients de la métrique relatifs à cette solution sont indépendants de la variable x^0. Il en résulte que le lagrangien L ne contient pas explicitement x^0. Par suite, suivant une technique

connue, si on multiplie scalairement par $\delta_0 z^a_{(1)}$ l'équation d'Euler associée à la variable $z^a_{(1)}$ dans (S'), et par $\delta_0 \gamma^{\alpha\beta}$ l'équation d'Euler associée à la variable $\gamma_{\alpha\beta}$, et si on ajoute les équations obtenues, on obtient une expression de la forme

$$\delta_0 A + \nabla_\lambda p^\lambda = 0 \tag{4-1}$$

où A est une quantité scalaire et p^λ un vecteur de V_4.

En repère orthonormé, on a alors

$$\nabla_\lambda p^\lambda = \nabla_\lambda p_\lambda = \nabla_0 p_0 + \nabla_i p_i.$$

Un calcul semblable à celui fait au début de la deuxième partie de ce chapitre conduit à

$$\nabla_\lambda p^\lambda = \delta_0 p_0 + \frac{1}{\xi} \dot{\nabla}_i (\xi p_i).$$

Et, en revenant au repère naturel,

$$\nabla_\lambda p^\lambda = \frac{1}{\xi^2} \delta_0 p_0 - \varphi_i \delta_0 p_i + \frac{1}{\xi} \dot{\nabla}_i (\xi p^i).$$

On remarque que

$$\frac{1}{\xi^2} p_0 - \varphi_i p^i = p^0.$$

Par suite, $$\nabla_\lambda p^\lambda = \delta_0 p^0 + \frac{1}{\xi} \dot{\nabla}_i (\xi p^i),$$

et (4-1) devient

$$\delta_0 (A + p^0) + \frac{1}{\xi} \dot{\nabla}_i (\xi p^i) = 0. \tag{4-2}$$

Soit $\mathcal{C}$ une chaîne différentiable de W_3, $\partial\mathcal{C}$ son bord. Par intégration de (4-2) sur $\mathcal{C}$, on obtient

$$\delta_0 \int_{\mathcal{C}} \xi (A + p^0) \text{ vol} + \text{flux}_{\partial\mathcal{C}} (\vec{\xi p}) = 0. \tag{4-3}$$

Contribution de la gravitation à l'expression (4-3).

Dans le schéma variationnel, la gravitation est décrite par une connexion symétrique repérée par les quarante variables d'état $\Gamma_\lambda{}^\varrho{}_\mu$. Le lagrangien qui lui correspond est

$$\varphi_1 = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + k.$$

Si maintenant nous faisons la transformation

$$g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}$$

et

$$\Gamma_{\lambda}{}^{\rho}{}_{\mu} \to \Gamma_{\lambda}{}^{\rho}{}_{\mu} + A_{\lambda}{}^{\rho}{}_{\mu}$$

où

$$A_{\lambda}{}^{\rho}{}_{\mu} = \delta\Gamma_{\lambda}{}^{\rho}{}_{\mu}.$$

On obtient

$$g^{\alpha\beta} \to g^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\lambda}\gamma_{\lambda}{}^{\beta} + \cdots$$
$$R_{\alpha\beta} \to R_{\alpha\beta} + [\nabla_{\lambda}A_{\beta}{}^{\lambda}{}_{\alpha} - \nabla_{\beta}A_{\lambda}{}^{\lambda}{}_{\alpha}] + A_{\lambda}{}^{\lambda}{}_{\mu}A_{\beta}{}^{\mu}{}_{\alpha} - A_{\beta}{}^{\lambda}{}_{\mu}A_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\lambda}$$

et

$$\sqrt{|\det(g_{\alpha\beta})|} \to \sqrt{|\det(g_{\alpha\beta})|}\left[1 + \frac{1}{2}\gamma + \left(\frac{1}{8}\gamma^2 - \frac{1}{4}\gamma^{\lambda\mu}\gamma_{\lambda\mu}\right)\right] + \cdots$$

On en déduit pour l'expression du lagrangien quadratique

$$L = \left(\frac{1}{8}\gamma^2 - \frac{1}{4}\gamma_{\lambda\mu}\gamma^{\lambda\mu}\right)(g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + k) - \left(\gamma^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\gamma\right)(\nabla_{\lambda}A_{\beta}{}^{\lambda}{}_{\alpha} - \nabla_{\beta}A_{\lambda}{}^{\lambda}{}_{\alpha})$$
$$+ \left(\gamma^{\alpha\lambda} - \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\gamma\right)\gamma_{\lambda}{}^{\beta}R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}(A_{\lambda}{}^{\lambda}{}_{\mu}A_{\beta}{}^{\mu}{}_{\alpha} - A_{\beta}{}^{\lambda}{}_{\mu}A_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\lambda}).$$

Soit δ_1 une variation affectant seulement les $A_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\rho}$. On a

$$\delta_1 L = \left(\frac{1}{2}\gamma g^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta}\right)[\nabla_{\lambda}\delta_1(A^{\lambda}_{\beta\alpha}) - \nabla_{\beta}\delta_1(A^{\lambda}_{\lambda\alpha})] + g^{\alpha\beta}[A^{\lambda}_{\lambda\mu}\delta_1(A^{\mu}_{\beta\alpha})$$
$$+ \delta_1(A^{\lambda}_{\lambda\mu})A^{\mu}_{\beta\alpha} - \delta_1(A^{\mu}_{\beta\lambda})A^{\lambda}_{\alpha\mu} - A^{\lambda}_{\beta\mu}\delta_1(A^{\mu}_{\alpha\lambda})]$$

Cette expression se transforme d'une part en modifiant le nom des indices muets, d'autre part en appliquant la formule de différentiation d'un produit. Il vient

$$\delta_1 L = \nabla_{\lambda}[-\Gamma^{\alpha\beta}(\delta_1 A^{\lambda}_{\beta\alpha} - \delta^{\lambda}_{\beta}\delta_1 A^{\rho}_{\rho\alpha})] + [\nabla_{\lambda}\Gamma^{\alpha\beta} - \delta^{\beta}_{\lambda}\nabla_{\rho}\Gamma^{\alpha\rho}$$
$$+ g^{\alpha\beta}A^{\rho}_{\rho\lambda} + g^{\rho\sigma}A^{\beta}_{\rho\sigma}\delta^{\alpha}_{\lambda} - 2A^{\alpha}_{\rho\lambda}g^{\rho\beta}]\delta_1 A^{\lambda}_{\alpha\beta}.$$

Les équations d'Euler correspondantes s'écrivent

(4-4)

$$\nabla_{\lambda}\gamma^{\alpha\beta} - A^{\alpha}_{\mu\lambda}g^{\mu\beta} - A^{\beta}_{\mu\lambda}g^{\alpha\mu} + \frac{1}{2}\delta^{\beta}_{\lambda}[-\nabla_{\mu}\gamma^{\alpha\mu} + A^{\alpha}_{\rho\mu}g^{\mu\rho} + \frac{1}{2}\partial_{\rho}\gamma g^{\alpha\rho}]$$
$$+ \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\lambda}[-\nabla_{\mu}\gamma^{\beta\mu} + A^{\beta}_{\rho\mu}g^{\mu\rho} + \frac{1}{2}\partial_{\rho}\gamma g^{\beta\rho}] + g^{\alpha\beta}[A^{\rho}_{\rho\lambda} - \frac{1}{2}\partial_{\lambda}\gamma] = 0.$$

Soit maintenant δ_2 une variation affectant seulement les $\gamma_{\lambda\mu}$. On a

$$\delta_2 L = \left(\frac{1}{4}\gamma\delta_2\gamma - \frac{1}{2}\gamma_{\lambda\mu}\delta_2\gamma^{\lambda\mu}\right)(g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + k)$$
$$- \left(\delta_2\gamma^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\delta_2\gamma\right)(\nabla_{\lambda}A^{\lambda}_{\beta\alpha} - \nabla_{\beta}A^{\lambda}_{\lambda\alpha})$$
$$+ \left(\delta_2\gamma^{\alpha\lambda} - \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\delta_2\gamma\right)\gamma^{\lambda}_{\beta}R_{\alpha\beta} + \left(\gamma^{\alpha\lambda} - \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\gamma\right)\delta_2\gamma^{\beta}_{\lambda}R_{\alpha\beta}.$$

Les équations d'Euler correspondantes s'écrivent

$$(4\text{-}5)\quad -\Big[\nabla_\lambda A^\lambda_{\beta\alpha} - \frac{1}{2}\nabla_\beta A^\lambda_{\lambda\alpha} - \frac{1}{2}\nabla_\alpha A^\lambda_{\lambda\beta}\Big]$$
$$+\frac{1}{2}g^{\rho\mu}g_{\alpha\beta}[\nabla_\lambda A^\lambda_{\rho\mu} - \nabla_\rho A^\lambda_{\lambda\mu}] - \frac{1}{2}\gamma R_{\alpha\beta} + R_{\lambda\beta}\gamma^\lambda_\alpha + R_{\lambda\alpha}\gamma^\lambda_\beta$$
$$-\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}(R+k) + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\Big[\frac{1}{2}\gamma(R+k) - \gamma^{\rho\mu}R_{\rho\mu}\Big] = 0.$$

Remarque. — Les équations (4-3) et (4-5) peuvent aussi être obtenues en écrivant les équations aux variations (au sens de Poincaré) associées aux équations d'Euler qui correspondent à l'intégrale

$$I = \int (R_{\alpha\beta} + k)\, g^{\alpha\beta}\sqrt{|\text{dét}\,(g_{\alpha\beta})|}\, dx^0\, dx^1\, dx^1\, dx^3.$$

Les équations d'Euler relatives à la variable $g_{\alpha\beta}$ s'écrivent en effet

$$\Big[-R^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(R+k)g^{\alpha\beta}\Big]\sqrt{|\text{dét}\,(g_{\alpha\beta})|} = 0,$$

qui donne très exactement (4-5) par variation, puis abaissement des indices. Les équations d'Euler relatives à la connexion s'écrivent

$$-\nabla_\lambda g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\delta^\alpha_\lambda \nabla_\rho g^{\rho\beta} + \frac{1}{2}\delta^\beta_\lambda \nabla_\rho g^{\rho\alpha} - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\lambda \Gamma^\rho_{\rho\sigma} g^{\sigma\beta} - \frac{1}{2}\delta^\beta_\lambda \Gamma^\rho_{\rho\sigma} g^{\sigma\alpha}$$
$$+ g^{\alpha\beta}\Gamma^\rho_{\rho\lambda} - \frac{\partial_\lambda u}{u} g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\delta^\alpha_\lambda \frac{\partial_\rho u}{u} g^{\rho\beta} + \frac{1}{2}\delta^\beta_\lambda \frac{\partial_\rho u}{u} g^{\rho\alpha} = 0$$

où $$u = \sqrt{|\text{dét}\,(g_{\alpha\beta})|}.$$

Elle redonne (4-4) par variation.

On fait la multiplication contractée de (4-4) par $\partial_0 A_\alpha{}^\lambda{}_\beta$ et de (4-5) par $\partial_0 \gamma^{\alpha\beta}$ et on ajoute les résultats. Il vient, après réduction

$$\nabla_\lambda\Big[-A_\beta{}^\lambda{}_\alpha\,\partial_0\gamma^{\alpha\beta} + A_\rho{}^\rho{}_\alpha\,\partial_0\gamma^{\alpha\lambda} + \frac{1}{2}\partial_0\gamma(g^{\rho\mu}A_\rho{}^\lambda{}_\mu - g^{\lambda\rho}A_\mu{}^\mu{}_\rho)\Big]$$
$$+\partial_0\Big[A_\beta{}^\lambda{}_\alpha\nabla_\lambda\gamma^{\alpha\beta} - A_\rho{}^\rho{}_\alpha\nabla_\lambda\gamma^{\alpha\lambda} - \frac{1}{2}\partial_\lambda\gamma(g^{\rho\mu}A_\rho{}^\lambda{}_\mu - g^{\lambda\rho}A_\mu{}^\mu{}_\rho)$$
$$-A_\alpha{}^\lambda{}_\beta A_\lambda{}^\alpha{}_\mu g^{\mu\beta} + A_\alpha{}^\beta{}_\beta A_\rho{}^\alpha{}_\mu g^{\rho\mu} - \frac{1}{2}\gamma\gamma^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + R_{\lambda\alpha}\gamma^{\alpha\beta}\gamma^\lambda{}_\beta$$
$$-\frac{1}{4}(R+k)\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} + \frac{1}{8}(R+k)\gamma^2\Big].$$

Pour simplifier cette expression, nous allons maintenant tenir compte de (1-4). Il vient

$$(4\text{-}6)\qquad \nabla_\lambda \mathfrak{p}^\lambda_1 + \partial_0 A_1 = 0$$

où

$$p_1{}^{\lambda} = - \nabla_{\beta}\gamma_{\alpha}^{\lambda}\,\partial_0\gamma^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\nabla^{\lambda}\gamma_{\alpha\beta}\,\partial_0\gamma^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\partial_{\alpha}\gamma\,\partial_0\gamma^{\alpha\lambda} - \frac{1}{2}\partial_0\gamma\,\partial^{\lambda}\gamma$$

et

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(\nabla_{\beta}\gamma_{\alpha}^{\lambda} - \frac{1}{2}\nabla^{\lambda}\gamma_{\alpha\beta}\right)\nabla_{\lambda}\gamma^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Y^{\alpha}\partial_{\alpha}\gamma - \frac{1}{2}\gamma\gamma^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}$$
$$+ \gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\beta}^{\lambda}S_{\lambda\alpha} - \frac{1}{4}\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}(S + k) + \frac{1}{8}\gamma^2(S + k).$$

Plus généralement, des théorèmes de conservation analogues existent pour tous les schémas connus, que ce soit en théorie quadridimensionnelle ou dans la théorie de Jordan-Thiry. Le lagrangien correspondant à un ensemble phénomènes simultanés étant par hypothèse la somme des lagrangiens φ_I correspondant aux différents phénomènes, le scalaire A et le vecteur p^{λ} du théorème de conservation sont respectivement la somme des scalaires A_I et des vecteurs p_I correspondant à chacun des phénomènes. Le premier membre de (4-6) représente alors la contribution du phénomène gravitation à de tels théorèmes.

Autre expression du théorème de conservation. — On sait que l'équation d'Euler associée à l'intégrale I et à la variable $\Gamma_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\beta}$ donne après simplification

$$\nabla_{\lambda}g^{\alpha\beta} = 0,$$

qui exprime que la connexion $\Gamma_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\beta}$ est la connexion riemanienne associée à la métrique de coefficients $g_{\alpha\beta}$. Tenant compte de ce résultat dans l'équation d'Euler relative à la variable $g_{\alpha\beta}$, on obtient l'équation classique d'Einstein dans laquelle $S_{\alpha\beta}$ est supposé exprimé en fonction de $g_{\alpha\beta}$. Par variation au sens de Poincaré, il vient

$$\delta(S_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}\left[(\Delta\gamma)_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}Y_{\beta} + \nabla_{\beta}Y_{\alpha} - g_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2}\Delta\gamma + \nabla_{\lambda}Y^{\lambda} - R_{\rho\lambda}\gamma^{\rho\lambda}\right)\right.$$
$$\left. - (R + k)\gamma_{\alpha\beta}\right] = 0.$$

On retrouve le théorème de conservation en faisant le produit contracté $-\partial_0\gamma^{\alpha\beta}\delta(S_{\alpha\beta})$.

Nous allons maintenant calculer l'expression $-\partial_0\gamma^{\alpha\beta}\delta(S_{\alpha\beta})$ en remplaçant systématiquement tout tenseur T de V_4 figurant dans cette expression par les tenseurs de W_3 qui lui correspondent canoniquement comme il l'a été dit au début du chapitre III. Cela permet de transformer l'expression étudiée en une somme de termes dont le signe est connu à priori.

Remarque. — Soient deux tenseurs symétriques d'ordre 2 dont on désigne les composantes par $A_{\alpha\beta}$ et $B_{\alpha\beta}$. Leur produit contracté est le scalaire

$$s = A_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta}.$$

Ce produit ne dépend pas du repère choisi, En repère orthonormé adapté, il s'écrit

$$s = A_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}B_{\underline{\alpha}\underline{\beta}},$$

c'est-à-dire

$$s = A_{\underline{0}\underline{0}}B_{\underline{0}\underline{0}} + 2A_{\underline{0}\underline{i}}B_{\underline{0}\underline{i}} + A_{\underline{i}\underline{j}}B_{\underline{i}\underline{j}}.$$

On revient au repère naturel en faisant apparaître le tenseur $\dot{A}_{ij}$ et le vecteur $\frac{A^i_0}{\xi}$ définis sur W_3 comme il l'a été indiqué au début de ce chapitre. Il vient

$$s = \frac{A_{00}}{\xi^2}\frac{B_{00}}{\xi^2} + 2\frac{\dot{A}_{0i}}{\xi}\frac{B^i_0}{\xi} + \dot{A}_{ij}B^{ij}.$$

En particulier

$$(4\text{-}7)\quad \partial_0\gamma^{\alpha\beta}[\Delta\underline{\gamma}]_{\alpha\beta} = \partial_0\frac{\gamma_{00}}{\xi^2}\cdot\frac{1}{\xi^2}[\Delta\underline{\gamma}]_{00} + 2\partial_0\frac{\gamma_{0i}}{\xi}\cdot\frac{1}{\xi}[\Delta\underline{\gamma}]^i_0 + \partial_0\gamma_{ij}[\Delta\underline{\gamma}]^i{}_j$$

Calcul du terme $T_1 = -\partial_0\gamma^{\alpha\beta}[\Delta\underline{\gamma}]_{\alpha\beta}$. — Nous partirons des équations (3-14), (3-15), (3-16) et de l'équation (4-7). En repère naturel, les trois premières équations s'écrivent

(4-8)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\xi^2}[\Delta\underline{\gamma}]_{00} &= g^{00}\partial_{00}u + \frac{1}{\xi}\dot{\nabla}_i(\xi\partial^i u) - \frac{1}{\xi}\dot{\nabla}_i(\xi\varphi^i\partial_0 u) - \varphi^i\partial_{0i}u \\
&\quad + 4\frac{\partial_i\xi}{\xi^2}\partial_0 V^i - 2\xi H^i{}_r[\dot{\nabla}_i V^r - \varphi_i\partial_0 V^r] \\
&\quad - 2\left[\dot{\nabla}_i\left(\frac{\partial_r\xi}{\xi}\right) - \frac{1}{2}\xi^2 H_r{}^m H_{im}\right]\gamma^{ir} + 2[\dot{\nabla}_i V^r - \varphi_i\partial_0 V^r] \\
-\frac{1}{\xi}[\Delta\underline{\gamma}]^i_0 &= g^{00}\partial_{00}V^i + \frac{1}{\xi}\dot{\nabla}_i(\xi\dot{\nabla}^i V^i) - \frac{1}{\xi}\dot{\nabla}_i(\xi\varphi^i\partial_0 V^i) - \varphi^i\partial_0(\dot{\nabla}_i V^i) \\
&\quad + 2\frac{\partial_r\xi}{\xi^2}\partial_0\gamma^{ri} - 2\frac{\partial_i\xi}{\xi^2}\partial_0 u - H^i{}_i\partial_0 V^i \\
&\quad - H^i{}_r[\dot{\nabla}_i\gamma^{ri} - \varphi_i\partial_0\gamma^{ri}] + \xi H^{ii}[\dot{\nabla}_i u - \varphi_i\partial_0 u] \\
&\quad + \left[\dot{\nabla}_i\left(\frac{\partial^i\xi}{\xi}\right) - \xi^2 H^2\right]V^i - \left[\dot{R}^i_i - 3\dot{\nabla}_i\left(\frac{\partial^i\xi}{\xi}\right) + \xi^2 H^{ir}H_{ir}\right]V^i \\
&\quad - \frac{1}{\xi}\dot{\nabla}_i(\xi^2 H^{ii})u + \frac{1}{\xi}\dot{\nabla}_i(\xi^2 H^i{}_r)\gamma^{ir}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-[\Delta\underline{\gamma}]^{ij} = {} & g^{00}\partial_{00}\gamma^{ij} + \frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_l(\dot\nabla^i\gamma^{ij}) - \frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_l(\xi\varphi^l\partial_0\gamma^{ij}) - \varphi^l\partial_0(\dot\nabla_l\gamma^{ij}) \\
& - H^i{}_r\partial_0\gamma^{rj} - H^j{}_r\partial_0\gamma^{ri} - 2\,\frac{\partial^i\xi}{\xi^2}\,\partial_0 V^j - 2\,\frac{\partial^j\xi}{\xi^2}\,\partial_0 V^i \\
& - \xi H^{il}[\dot\nabla_l V^j - \varphi_l\partial_0 V^j] - \xi H^{jl}[\dot\nabla_l V^i - \varphi_l\partial_0 V^i] \\
& + \left[\dot\nabla_r\left(\frac{\partial^i\xi}{\xi}\right) - \dot R^i{}_r\right]\gamma^{rj} + \left[\dot\nabla_r\left(\frac{\partial^j\xi}{\xi}\right) - \dot R^j{}_r\right]\gamma^{ri} \\
& + [2\dot R^i{}_{l,}{}^j{}_r - \xi^2 H^i{}_l H^j{}_r]\gamma^{rl} \\
& - \frac{1}{\xi}[\dot\nabla_l(\xi^2 H^{il})V^j + \dot\nabla_l(\xi^2 H^{jl})V^i + (\dot\nabla^i(\xi^2 H^j{}_l) + \dot\nabla^j(\xi^2 H^i{}_l))V^l] \\
& - 2\left[\dot\nabla^j\left(\frac{\partial^i\xi}{\xi}\right) - \frac{1}{2}\,\xi^2 H^i{}_l H^{jl}\right]u
\end{aligned}
$$

Pour simplifier l'écriture, nous introduirons le tenseur défini sur W_3 par l'équation

$$
\begin{aligned}
B_{ij,\,lr} = {} & \dot R_{il,\,jr} + \dot R_{ir,\,jl} - \frac{1}{2}\,\xi^2(H_{il}H_{jr} + H_{ir}H_{jl}) - \frac{1}{2}\,\dot g_{il}\left(\dot R_{jr} - \dot\nabla_r\left(\frac{\partial_j\xi}{\xi}\right)\right) \\
& - \frac{1}{2}\,\dot g_{ir}\left(\dot R_{jl} - \dot\nabla_l\left(\frac{\partial_j\xi}{\xi}\right)\right) - \frac{1}{2}\,\dot g_{jl}\left(\dot R_{ir} - \dot\nabla_r\left(\frac{\partial_i\xi}{\xi}\right)\right) \\
& - \frac{1}{2}\,\dot g_{jr}\left(\dot R_{il} - \dot\nabla_l\left(\frac{\partial_i\xi}{\xi}\right)\right).
\end{aligned}
$$

On a visiblement

$$B_{ij,\,rl} = B_{ij,\,lr} = B_{jl,\,ri} = B_{lr,\,ij}.$$

Par contraction de l et de r, il vient

$$B_{ij} = B_{ij,}{}^l{}_l = B^l{}_{l,\,ij} = 2\left[\dot\nabla_i\left(\frac{\partial_j\xi}{\xi}\right) - \frac{1}{2}\,\xi^2 H_i{}^l H_{jl}\right].$$

En contractant i et j sur ce résultat, on obtient

$$B = B_l{}^l = 2\left[\dot\nabla_l\left(\frac{\partial_l\xi}{\xi}\right) - \xi^2 H^2\right].$$

Avec ces notations, (4-8) s'écrit

(4-9)

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\xi^2}\,[\Delta\underline{\gamma}]_{00} = {} & g^{00}\,\partial_{00}u + \frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_l(\xi\dot\nabla^l u) - \frac{1}{\xi}\,\dot\nabla_l(\xi\varphi^l\,\partial_0 u) - \varphi^l\,\partial_{0l}u \\
& + 4\,\frac{\partial_l\xi}{\xi^2}\,\partial_0 V^l - 2\xi H^l{}_r[\dot\nabla_l V^r - \varphi_l\,\partial_0 V^r] - B_{rl}(\gamma^{rl} - g^{rl}u)
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{\xi}[\Delta\underline{\gamma}]^i_0 = g^{00}\partial_{00}V^i + \frac{1}{\xi}\dot\nabla_l(\xi\dot\nabla_l V^i) - \frac{1}{\xi}\dot\nabla_l(\xi\varphi^l\partial_0\dot\nabla^i) - \varphi^l\partial_0(\dot\nabla_l V^i)$$
$$+\left[2\frac{\partial_r\xi}{\xi^2} + H_{lr}\varphi^l\right]\partial_0(\gamma^{ri} - g^{ri}u) - \xi H^l{}_r\dot\nabla_l(\gamma^{ri} - g^{ri}u)$$
$$+\frac{1}{\xi}\dot\nabla_l(\xi^2 H^i{}_r)(\gamma^{rl} - g^{rl}u) - H^i{}_l\partial_0 V^l + \frac{1}{2}BV^i$$
$$-\left[\dot R^i{}_l - 3\dot\nabla_l\left(\frac{\partial^i\xi}{\xi}\right) + \xi^2 H^{ir}H_{lr}\right]V^l$$

$$-[\Delta\underline{\gamma}]^{ij} = g^{00}\partial_{00}\gamma^{ij} + \frac{1}{\xi}\dot\nabla_l(\xi\dot\nabla^l\gamma^{ij}) - \frac{1}{\xi}\dot\nabla_l(\xi\varphi^l\partial_0\gamma^{ij}) - \varphi^l\partial_0(\dot\nabla_l\gamma^{ij})$$
$$-H^i{}_r\partial_0\gamma^{rj} - H^j{}_r\partial_0\gamma^{ri} - 2\frac{\partial^i\xi}{\xi^2}\partial_0 V^j - 2\frac{\partial^j\xi}{\xi^2}\partial_0 V^i$$
$$-\xi H^{il}[\dot\nabla_l V^j - \varphi_l\partial_0 V^j]$$
$$-\xi H^{jl}[\dot\nabla_l V^i - \varphi_l\partial_0 V^i] + B^{ij}{}_{,rl}(\gamma^{rl} - g^{rl}u)$$
$$-\frac{1}{\xi}[\dot\nabla_l(\xi^2 H^{il})V^j + \dot\nabla_l(\xi^2 H^{jl})V^i + (\dot\nabla^i(\xi^2 H^j{}_l) + \dot\nabla^j(\xi^2 H^i{}_l))V^l].$$

Multiplions la première de ces équations par $\partial_0 u$, la seconde par $2\partial_0 V_i$ et la troisième par $\partial_0\dot\gamma_{ij}$ et ajoutons les résultats. On obtient, après des transformations évidentes

$$T_1 = \partial_0 U_1 + \frac{1}{\xi}\dot\nabla_l(k_1{}^l)$$

où

$$U_1 = \frac{1}{2}g^{00}[(\partial_0 u)^2 + 2\partial_0 V_i\partial_0 V^i + \partial_0\dot\gamma_{ij}\partial_0\gamma^{ij}]$$
$$-g^{lr}[\partial_l u\partial_r u + 2\dot\nabla_l V_i\dot\nabla_r V^i + \dot\nabla_l\dot\gamma_{ij}\dot\nabla_r\gamma^{ij}] + Bu^2 - 2B_{rl}u\gamma^{rl}$$
$$+B_{ij,\,rl}\gamma^{ij}\gamma^{rl} - 2\left(\dot R_{il} - 3\dot\nabla_l\left(\frac{\partial_i\xi}{\xi}\right) + \xi^2 H_i{}^r H_{lr} - \frac{1}{2}g_{il}B\right)V^iV^l$$
$$+4\left[\xi H^{rl}u\dot\nabla_l V_r - H^{rl}\dot\gamma_{rj}\dot\nabla_l V^j - \frac{1}{\xi}\dot\nabla_l(\xi^2 H^{jl})V^i\dot\gamma_{ij} + \frac{1}{\xi}\dot\nabla_l(\xi^2 H_{ir})V^i\gamma^{rl}\right]$$

et

$$k^l = \xi\partial_0 u[\dot\nabla^i u - \varphi^i\partial_0 u] + 2\xi\partial_0 V_l[\dot\nabla^i V^l - \varphi^i\partial_0 V^l]$$
$$+\xi\partial_0\dot\gamma_{lr}[\dot\nabla^i\dot\gamma^{lr} - \varphi^i\partial_0\dot\gamma^{lr}] - 2\xi^2(H^{ir}u\partial_0 V_r - H^{il}\partial_0 V^j\dot\gamma_{ij}).$$

Calcul des termes restants. — Nous ferons ce calcul plus rapidement sans faire intervenir les tenseurs de W_3. On a d'abord

$$T_2 = -2\partial_0\gamma^{\alpha\beta}\nabla_\beta Y_\alpha.$$

On en déduit, en utilisant la formule donnant la différentiation d'un produit

$$T_2 = -2\nabla_\lambda(\partial_0\gamma^{\alpha\lambda}Y_\alpha) + 2\partial_0\nabla_\lambda\gamma^{\alpha\lambda}Y_\alpha.$$

Mais

$$\gamma^{\alpha\lambda} = \Gamma^{\alpha\lambda} - \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}\Gamma$$

entraîne

$$T_2 = -2\nabla_\lambda(\partial_0\gamma^{\alpha\lambda}Y_\alpha) + \partial_0(Y_\alpha Y^\alpha) - Y_\alpha\partial_0\nabla^\alpha\Gamma.$$

Puis

$$T_3 = \partial_0\gamma^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{2}\Delta\gamma + \nabla_\lambda Y^\lambda\right]$$

s'écrit encore

$$T_3 = \partial_0\gamma\nabla_\lambda\left(Y^\lambda + \frac{1}{2}\partial^\lambda\gamma\right)$$

ou, de façon évidente

$$T_3 = \nabla_\lambda\left(\partial_0\left[Y^\lambda + \frac{1}{2}\partial^\lambda\gamma\right]\right) - \left(Y^\lambda + \frac{1}{2}\partial^\lambda\gamma\right)\nabla_\lambda(\partial_0\gamma).$$

On en déduit

$$T_2 + T_3 = \nabla_\lambda\left(-2\partial_0\Gamma^{\alpha\lambda}Y_\alpha + \frac{1}{2}\partial_0\gamma\partial^\lambda\gamma\right) + \partial_0(Y_\alpha Y^\alpha) - \frac{1}{4}\partial_0(\partial_\lambda\gamma\partial^\lambda\gamma).$$

Au total, on a

$$-2\partial_0\gamma^{\alpha\beta}\delta(S_{\alpha\beta}) = \partial_0 U + \frac{1}{\xi}\dot{\nabla}_i k^i \tag{4-10}$$

où

$$U = U_1 + Y_\alpha Y^\alpha - \frac{1}{4}\partial^\lambda\gamma\partial_\lambda\gamma - 2\partial_0\Gamma^{\alpha 0}Y_\alpha + \frac{1}{2}\partial_0\gamma\partial_0\gamma$$

et

$$k^i = k_1^i - 2\xi\partial_0\Gamma^{\alpha i}Y_\alpha + \frac{1}{2}\xi\partial_0\gamma\partial^i\gamma.$$

On multiplie par ξ les deux membres de (4-10), et on intègre sur une chaîne différentiable $\mathcal{C}$ de W_3. Il vient

$$\int_{\mathcal{C}}\xi\partial_0 U\,\mathrm{vol} + \mathrm{flux}_{\partial\mathcal{C}}\vec{H} = -2\int_{\mathcal{C}}\xi\,\partial_0\gamma^{\alpha\beta}\delta(S_{\alpha\beta})\,\mathrm{vol}. \tag{4-11}$$

Cas où W_3 *est compacte.* — On choisit $\mathcal{C} = W_3$. (4-11) devient

$$\partial_0\int_{W_3}\xi U\,\mathrm{vol} = -2\int_{W_3}\xi\,\partial_0\gamma^{\alpha\beta}\delta\,(S_{\alpha\beta})\,\mathrm{vol},$$

qui se réduit à

$$\int_{W_3}\xi U\,\mathrm{vol} = C^{te}$$

lorsqu'on se limite à des variations telles que $\delta(S_{\alpha\beta})\gamma^{\alpha\beta} = 0$.

Cas où W_3 *est non compacte.* — Nous supposerons alors que V_4 admet sur W_3 un comportement asymptotique euclidien. D'après la définition donnée par A. Lichnérowicz à cette expression, on peut schématiser cette hypothèse de la façon suivante.

Étant donnés deux points x_1 et x_2 de W_3, considérons les longueurs des chemins continument différentiables par morceaux, tracés sur W_3 et joignant les deux points. Nous appellerons distance de ces deux points et noterons $d(x_1, x_2)$ la borne inférieure des longueurs de ces chemins joignant x_1 et x_2.

Soit a un point de W_3. Nous supposerons qu'on peut trouver un nombre $R_1(a)$, positif, tel qu'il existe un homéomorphisme h de classe C^2 du domaine $d(a, x) \geq R_1$ de W_3 sur le complémentaire d'une boule fermée d'un espace euclidien E_3. Cet homéomorphisme définit sur le domaine envisagé de W_3 une structure d'espace euclidien. Nous supposerons que E_3 admet une métrique définie négative ds_1^2 et est rapporté à un système de coordonnées privilégié tel que

$$ds_1^2 = \eta_{ij}\, dy^i\, dy^j$$

où

$$\eta_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j,$$
$$\eta_{ij} = -1 \quad \text{si} \quad i = j.$$

Nous poserons aussi $\eta_{00} = 1$, $\eta_{0i} = 0$.

Le domaine $d(a, x) > R_1$ de W_3 sera alors supposé rapporté au système de coordonnées (x^0, y^i).

M étant un nombre positif indépendant des x^i, nous avons, dans ce domaine, et pour le système de coordonnées privilégié envisagé

$$|g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}| < \frac{M}{r}$$

$$|\partial_\lambda g_{\alpha\beta}| < \frac{M}{r^2}$$

$(r = d(a, x))$.

Nous dirons alors que la fonction u est à comportement asymptotique euclidien si, M′ étant un nombre positif, ne dépendant que de a, on peut trouver un nombre positif $R_2(a)$ tel que

$$r > R_2 \quad \text{entraîne} \quad \begin{cases} |u| < \dfrac{M'}{r} \\ |\partial_i u| < \dfrac{M'}{r^2} \end{cases}$$

lorsque le système de coordonnées utilisé est le système privilégié défini ci-dessus.

Étude du flux du vecteur $\vec{k}$. — Soit Σ_ρ une sphère de E_3, de centre O, de rayon ρ, et soit S_{r_0} l'ensemble des points de W_3 tels que

$$d(a,\ x) = r_0 > \text{Sup}\ (R_1,\ R_2).$$

Nous supposerons ρ assez grand pour que $\Sigma_\rho \supset hS_{r_0}$, et désignerons par $\mathcal{S}_\rho$ l'image par h^{-1} de Σ_ρ. Considérons le compact B_ρ de W_3 défini par

a) les points x pour lesquels $d(a,\ x) \leq r_0$;

b) les points x pour lesquels $d(a,\ x) \geq r_0$ dont l'image dans E_3 est intérieure à Σ_ρ sur cette sphère.

Le bord de B_ρ est $\mathcal{S}_\rho$ orienté vers l'extérieur. Nous nous proposons d'étudier le flux du vecteur $\vec{k}$ à travers $\mathcal{S}_\rho$ quand $\rho \to \infty$ Nous supposerons que V_4 admet sur W_3 un comportement asymptotique euclidien, et que, pour le système de coordonnées utilisé, les $\gamma_{\alpha\beta}$ sont des fonctions à comportement asymptotique euclidien. Or le vecteur $\vec{k}$ est la somme de termes qui sont tous de la forme $\partial_\lambda \gamma_{\alpha\beta}\, \partial_\mu \gamma_{\sigma\rho}$ ou $\partial_\lambda \gamma_{\alpha\beta}\, \partial_\mu g_{\sigma\rho}$. D'après l'inégalité triangulaire et les hypothèses faites sur le comportement des $g_{\alpha\beta}$ et des $\gamma_{\alpha\beta}$, on voit qu'il existe une constante C telle que

$$|g_{tr} k^t k^r| < \frac{C}{r^4} \qquad \text{sur} \qquad \mathcal{S}_\rho.$$

On en déduit, d'après un calcul fait par A. Lichnérowicz, et en désignant par C_1 une autre constante positive

$$\text{flux}_{\mathcal{S}_\rho} \vec{k} \leq \frac{C_1}{\rho^2}.$$

Donc

$$\lim_{\rho \to \infty} \text{flux}_{\mathcal{S}_\rho} \vec{k} = 0.$$

On voit de la même façon que, sur $\mathcal{S}_\rho$, il existe une constante positive C_2 telle que

$$U \leq \frac{C_2}{\rho^4}$$

Écrivons (4-11) en choisissant B_ρ pour chaîne différentiable. Il vient

$$\partial_0 \int_{B_\rho} \xi U \,\text{vol} + \text{flux}_{\mathcal{S}_\rho} \vec{k} = -2 \int_{B_\rho} \xi\, \partial_0 \gamma^{\alpha\beta}\, \delta(S_{\alpha\beta})\,\text{vol}.$$

Lorsque $\rho \to \infty$, il reste

$$\partial_0 \int_{W_3} \xi U \,\text{vol} = -2 \int_{W_3} \xi\, \partial_0 \gamma^{\alpha\beta}\, \delta(S_{\alpha\beta})\,\text{vol}.$$

A priori, U n'a pas un signe constant. En effet, d'après les hypothèses faites sur la métrique de coefficients $g_{\alpha\beta}$, g^{00} est positif, et les g^{ij} sont les coefficients d'une forme quadratique définie négative. Supposons par exemple les coordonnées choisies de façon que $Y_\alpha = 0$, alors $g^{00}(\partial_0 u)^2 - \dot{g}^{rl}\partial_r u\,\partial_l u$ et $g^{00}(\partial_0\dot{\gamma}_{ij}\partial_0\gamma^{ij}) - \dot{g}^{rl}\dot{\nabla}_r\dot{\gamma}_{ij}\dot{\nabla}_l\gamma^{ij}$ sont deux termes positifs, tandis que $g^{00}\partial_0 V_i\,\partial_0 V^i - \dot{g}^{tr}\dot{\nabla}_r V_i\dot{\nabla}_l V^i$ est négatif. On ne peut rien dire sur leur somme.

La condition de coordonnées $V^i = 0$ fait bien disparaître les termes négatifs provenant du laplacien, mais alors il apparaît dans les autres termes un produit $\dot{g}_{ij}Y^iY^j$, provenant de

$$Y_\alpha Y^\alpha = \frac{(Y_0)^2}{\xi^2} + \dot{g}_{ij}Y^iY^j,$$

qui est négatif, de telle sorte que l'ensemble n'a pas non plus un signe défini à priori.

Nous faisons toutefois la remarque suivante : si on suppose $g_{00} = 1$ et $g_{0i} = 0$, si on suppose d'autre part les coordonnées choisies de telle sorte que $Y_\alpha = 0$, on a des expressions extrêmement simples. Dans ce cas en effet,

$$(4\text{-}12) \qquad -(\Delta\underline{\gamma})_{00} = \partial_{00}u + \dot{\nabla}_l\dot{\nabla}^l u$$

$$(4\text{-}13) \qquad -(\Delta\underline{\gamma})_{0i} = \partial_{00}V_i + \dot{\nabla}_l\dot{\nabla}^l V_i - \dot{R}_{il}V^l$$

$$(4\text{-}14) \qquad -(\Delta\underline{\gamma})_{ij} = \partial_{00}\gamma_{ij} + \dot{\nabla}_l\dot{\nabla}^l\gamma_{ij} + B_{ij,rl}\gamma^{rl}$$

Les variables sont séparées, ce qui nous permettra d'écrire une équation de conservation du type (4-11) pour chacun des groupes de variables u, V^i, γ^{ij}. Nous en déduirons un théorème concernant la stabilité des univers quasi-stationnaires.

II. STABILITÉ DES UNIVERS QUASI-STATIONNAIRES

1. Définition de la stabilité d'un modèle d'univers

Définition de la stabilité d'un système différentiel d'après Liapounoff. — Considérons un système d'équations différentielles

$$(4\text{-}15) \qquad \frac{dx}{dt} = F(t, x)$$

où t désigne une variable scalaire, identifiée au temps, x un vecteur

de R^n, et F une application de R^{n+1} dans R^n. Nous désignerons par $||x||$ l'une quelconque des normes de x

$$(4\text{-}16) \qquad ||x|| = \sum_{i=1}^{n} |x^i|$$

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x^i|^2}$$

$$||x|| = \max |x^i|$$

où les x^i sont les composantes de x.

Supposons la fonction F définie et continue pour tout t positif et quel que soit x dans un certain domaine D de R^n. Supposons que le système (4-15) admette une solution

$$x = f_0(t)$$

prenant la valeur x_0 pour $t = 0$, définie quel que soit $t \geq 0$, et telle que les vecteurs $f_0(t)$ appartiennent, quel que soit $t \geq 0$, au domaine D. On dit que la solution f_0 du système (4-15) est stable au sens de Liapounoff si :

1) Il existe un nombre $a > 0$ tel que, quel que soit $t \geq 0$ et quel que soit x_1 satisfaisant $||x_1 - x_0|| \leq a$, la solution $x = f_1(t)$ de (4-15) prenant la valeur x_1 pour $t = 0$ existe, et le vecteur $f_1(t)$ appartient à D quel que soit $t \geq 0$.

2) ε étant un nombre donné positif, il existe un nombre η, dépendant de ε, F, et x_0, tel que $0 < \eta \leq a$ et tel que

$$||x_1 - x_0|| \leq \eta \qquad \text{entraîne} \qquad ||f_1(t) - f_0(t)|| \leq \varepsilon$$

quel que soit $t \geq 0$.

Cette dernière hypothèse signifie que l'application $x_1 \to f_1$ de R^n normé par (4-16) dans l'espace des applications de R dans R^n muni de la topologie de la convergence uniforme, est continue au point x_0.

Définition de la stabilité infinitésimale d'un système différentiel.

Définition. — *Nous dirons que la solution $x = f_0(t)$ de* (4-15) *est infinitésimalement stable si la solution $x = 0$ du système aux variations*

$$(4\text{-}17) \qquad \frac{dx}{dt} = L(t)x$$

associé à (4-15) et à la solution $x = f_0(t)$ de ce système est stable. $L(t)$ désigne l'application linéaire de R^n dans R^n définie par

$$L(t) = F'_x(t, f_0(t)).$$

On remarquera que à priori, la stabilité infinitésimale n'entraîne pas la stabilité.

On a le théorème évident :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la solution* $x = 0$ *de* (4-17) *soit stable est que toutes les solutions de* (4-17) *soient bornées pour tout* $t \geq 0$.

Remarque. — On peut donner au mot stabilité un sens plus strict que Liapounoff en exigeant que les conditions 1) et 2) de stabilité soient vérifiées pour tout t (et non plus seulement pour $t \geq 0$). Nous parlerons dans ce cas de stabilité pour tout t.

Définition de la stabilité d'un système d'équations aux dérivées partielles. — Soit un système d'équations aux dérivées partielles mis sous la forme

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(t, x, D_v U). \tag{4-18}$$

Nous avons désigné par t la variable scalaire qui sera identifiée au temps, par $x = (x^1, \ldots, x^n)$ une variable appartenant à R^n, par U une inconnue vectorielle ($U \in R^p$). $D_v U^i$ représente une dérivée d'ordre quelconque de U par rapport aux x^i.

Supposons la fonction F définie et continue pour tout t positif (resp. pour tout t), pour tout x, et quelles que soient les valeurs des $D_v U$ dans un certain domaine D. Supposons que le système (4-18) admette une solution

$$U = [f_0(t)](x) \tag{4-19}$$

possédant les deux propriétés suivantes :

1) $f_0(t)$ est une application de R^n dans R^p, $f_0(0)$ en est une application donnée U_0.

2) Les valeurs des $D_v U$ correspondant à cette solution appartiennent à D, quel que soit $t \geq 0$ (resp. quel que soit t).

Pour pouvoir étendre la définition de la stabilité, donnée par Liapounoff dans le cas des équations différentielles ordinaires, il faut d'abord définir une norme sur un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ de l'ensemble des applications de R^n dans R^p. Supposons cette norme choisie sur $\mathcal{E}$: pour $A \in \mathcal{E}$, nous la noterons $||A||$.

DÉFINITION. — *Nous dirons que la solution* (4-19) *du système* (4-18) *est stable pour la norme choisie si*

1) *il existe un nombre* $a > 0$ *tel que, quel que soit* $t \geq 0$ (*resp. quel que soit* t) *et quelle que soit l'application* U_1 *de* R^n *dans* R^p *vérifiant*

$$\begin{cases} U_1 - U_0 \in \mathcal{E} \\ \|U_1 - U_0\| \leq a, \end{cases}$$

le système (4-18) *admet une solution unique, définie quels que soient* $t \geq 0$ (*resp. quel que soit* t) *et* x,

$$U = [f_1(t)](x)$$

telle que

$$f_1(0) = U_1$$

et telle que les valeurs des $D_v U$ *appartiennent, quels que soient* $t \geq 0$ (*resp. quel que soit* t) *et* x, *au domaine* D.

2) ε *étant un nombre donné positif, il existe un nombre* $\eta(\varepsilon, F, U_0)$, $0 < \eta \leq a$, *tel que*

$$\|U_1 - U_0\| \leq \eta \text{ entraîne } \begin{cases} f_1(t) - f_0(t) \in \mathcal{E} \\ \|f_1(t) - f_0(t)\| \leq \varepsilon \end{cases}$$

quel que soit $t \geq 0$ (*resp. quel que soit* t).

Cette dernière hypothèse peut être interprétée comme la continuité de l'application $U_1 \to f_1$ en U_0.

Remarque. — La stabilité dépend de la norme choisie, ce qui n'était pas le cas pour un système différentiel ordinaire.

Définition de la stabilité infinitésimale. — Nous dirons que la solution (4-19) est infinitésimalement stable si la solution nulle du système aux variations associé à (4-18) et relatif à la solution (4-19) est stable. On a ici encore le théorème évident.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la solution* $U = 0$ *d'un système aux dérivées partielles linéaire soit stable et que l'ensemble des solutions de ce système,*

$$U = [f(t)](x)$$

satisfasse la condition suivante : il existe un nombre M, *strictement positif, tel que*

$$f(0) \in \mathcal{E} \quad \text{entraîne} \quad f(t) \in \mathcal{E}, \quad \|f(t)\| \leq M$$

quel que soit $t \geq 0$ (*resp. quel que soit* t).

Pour alléger l'écriture, bien qu'abusivement, nous écrirons

$$\|f(t)\| = \|U\|_t$$

et en particulier

$$||f(0)|| = ||U||_0.$$

Un modèle d'univers est défini par une solution déterminée des équations d'Einstein, vérifiant certaines hypothèses de différentiabilité et de raccordement. Nous dirons que ce modèle d'univers est stable si la solution qui le définit est stable.

Nous n'étudierons ici que la stabilité infinitésimale et nous sous-entendrons le mot infinitésimale dans toute la suite.

Exemples d'études de stabilité.

Exemple 1. — Considérons l'équation des ondes pour la dimension 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{4-20}$$

où u désigne une inconnue scalaire. Elle est bien de la forme (4-18). En effet, si on introduit la deuxième inconnue

$$v = \frac{\partial u}{\partial t},$$

(4-20) s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = v \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{cases}$$

qui est de la forme étudiée, avec

$$U = (u, v).$$

Or, le théorème de conservation de l'énergie dans la propagation par ondes, résulte du calcul suivant : On multiplie par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et on intègre par rapport à x. Moyennant certaines hypothèses de convergence, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = 0$$

et, après intégration par partie du deuxième terme

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0$$

Le théorème de conservation de l'énergie s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \text{C}^{\text{te}}.$$

Si on choisit

$$(4\text{-}21) \qquad \|U\|_t = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx\right]^{1/2}$$

il vient $$\frac{\partial}{\partial t}\|U\|_t^2 = 0,$$

donc $$\|U\|_t = \|U\|_0,$$

ce qui prouve que la solution $u = 0$ de (4-20) est stable pour la norme (4-21)

Exemple 2. — Sur une variété V_4 de dimension 4, douée d'une structure de variété différentiable de classe C^2, C^4 par morceaux, supposons définie une métrique stationnaire, de type hyperbolique normal, de classe C^1, C^3 par morceaux, dont les coefficients, dans un système de coordonnées adaptées, sont désignés par $g_{\alpha\beta}$. Δ désignant le laplacien associé à cette métrique, u une variable scalaire, on considère l'équation

$$(4\text{-}22) \qquad \Delta u = 0.$$

Un calcul semblable à celui développé dans le deuxième paragraphe de ce chapitre conduit à

$$(4\text{-}23) \quad g^{00}\partial_{00}u + \frac{1}{\xi}\,\dot{\nabla}_i(\xi\partial^i u) - \frac{1}{\xi}\,\dot{\nabla}_i(\xi\varphi^i\partial_0 u) - \varphi^i\partial_{0i}u = 0.$$

Nous supposerons u régulière, c'est-à-dire de classe C^1, ses dérivées premières étant elles-mêmes C^1 par morceaux.

Soit W^3 une surface d'équation $x^0 = C^{te}$, partout orientée dans l'espace. On multiplie les deux membres de (4-23) par $\xi\partial_0 u$, et on intègre sur une chaîne différentiable $\mathcal{C}$ de W_3, de bord $\partial\mathcal{C}$. Une intégration par parties effectuée sur les deuxième et troisième termes permet d'écrire

$$\int_{\mathcal{C}} \partial_0 u[\dot{\nabla}_i(\xi\partial^i u) - \dot{\nabla}_i(\xi\varphi^i\partial_0 u)]\,\text{vol}$$

$$= \text{flux}_{\partial\mathcal{C}}[\xi\,\partial_0 u\,(\partial^i u - \varphi^i\partial_0 u)] - \int_{\mathcal{C}} \xi\,\partial_{i0}u\,[\partial^i u - \varphi^i\partial_0 u]\,\text{vol}.$$

On obtient donc

$$(4\text{-}24) \quad \frac{1}{2}\,\partial_0 \int_{\mathcal{C}} \xi[g^{00}(\partial_0 u)^2 - g^{ij}\partial_i u\,\partial_j u]\,\text{vol} + \text{flux}_{\partial\mathcal{C}}\vec{p} = 0$$

où $\vec{p}$ est le vecteur de W_3, dont les composantes sont données par

$$p^i = \xi\,\partial_0 u\,(\partial^i u - \varphi^i\partial_0 u).$$

Si nous faisons maintenant l'une où l'autre des deux hypothèses suivantes :

1) W_3 est compacte;

2) W_4 admet sur W_3 un comportement asymptotique euclidien, et u est à comportement asymptotique euclidien sur W_3, on peut alors écrire

$$\int_{W_3} \xi[g^{00}(\partial_0 u)^2 - g^{ij}\partial_i u \partial_j u]\mathrm{vol} = C^{te}.$$

Or, d'après les hypothèses faites sur W_3 et sur la métrique, g^{00} est strictement positif sur W_3, et les g^{ij} définissent une forme quadratique définie négative. Par suite, nous pourrons poser

$$(4\text{-}25) \qquad \|u\|_t = \left[\int_{W_3} \xi[g^{00}(\partial_0 u)^2 - g^{ij}\partial_i u \partial_j u]\mathrm{vol}\right]^{1/2}.$$

L'équation (4-22) est stable pour la norme (4-25)

Exemple 3. — Sur la variété V_4 précédente, désignons par $\underset{\sim}{\gamma}$ un champ de tenseurs d'ordre 2. On considère le système

$$(4\text{-}26) \qquad \Delta\underset{\sim}{\gamma} + k\underset{\sim}{\gamma} = 0 \qquad (k = C^{te}).$$

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que le théorème de conservation ne permet pas de définir une norme, car la quantité figurant sous le signe comme n'a pas un signe constant à priori. Le seul cas où nous pourrons obtenir un théorème de stabilité est celui où on a

$$g_{00} = 1, \qquad g_{0i} = 0.$$

Dans ce cas (4-26) se réduit, d'après les équations (4-12), (4-13) et (4-14), à

$$(4\text{-}27) \qquad \partial_{00}u + \dot{\nabla}_i(\partial^i u) - ku = 0$$
$$(4\text{-}28) \qquad \partial_{00}V^i + \dot{\nabla}_l(\dot{\nabla}^l V^i) - \dot{R}^i_l V^l - kV^i = 0$$
$$(4\text{-}29) \qquad \partial_{00}\gamma^{ij} + \dot{\nabla}_l(\dot{\nabla}^l\gamma^{ij}) + B^{ij}{}_{rl}\gamma^{rl} - k\gamma^{ij} = 0.$$

Sous les mêmes hypothèses que plus haut concernant d'une part la régularité des fonctions u, V, et $\underset{\sim}{\gamma}$, d'autre part la section W_3 et, le cas échéant, le comportement asymptotique des fonctions u, V et $\underset{\sim}{\gamma}$, on pourra poser

$$(4\text{-}30) \qquad \begin{cases} \|u\| = \int_{W_3}[(\partial_0 u)^2 - g^{lr}\partial_l u \partial_r u]\ \mathrm{vol}, \\ \|V\| = -\int_{W_3}[\partial_0 V_l \partial_0 V^i - g^{lr}\dot{\nabla}_l V_i \dot{\nabla}_r V^i]\ \mathrm{vol}, \\ \|\underset{\sim}{\dot{\gamma}}\| = \int_{W_3}[\partial_0\dot{\gamma}_{ij}\partial_0\dot{\gamma}^{ij} - g^{lr}\dot{\nabla}_l\dot{\gamma}_{ij}\dot{\nabla}_r\dot{\gamma}^{ij}]\ \mathrm{vol}. \end{cases}$$

Opérant comme plus haut, on voit que (4-27), (4-28) et (4-29) entraînent respectivement

$$(43\text{1-}) \qquad \begin{cases} ||u|| - \int_{W_3} ku^2 \, \mathrm{vol} = C_1 \\ ||V|| + \int_{W_3} (\dot{R}_{il} + k\dot{g}_{il}) V^i V^l \, \mathrm{vol} = C_2 \\ ||\dot{\underline{\gamma}}|| + \int_{W_3} (B_{ij,\,rl} - k\dot{g}_{ir}\dot{g}_{jl}) \gamma^{ij}\gamma^{rl} \, \mathrm{vol} = C_3 \end{cases}$$

où C_1, C_2, C_3 désignent trois constantes.

Posons encore

$$M_{ij,\,rl} = B_{ij,\,rl} - \frac{1}{2} k(\dot{g}_{ir}\dot{g}_{jl} + \dot{g}_{jr}\dot{g}_{il})$$

ou
$$M_{ij,\,rl} = \left(R_{ir,\,jl} - \frac{1}{2} k g_{ir} g_{jl}\right) + \left(R_{jr,\,il} - \frac{1}{2} k g_{jr} g_{il}\right).$$

On sait que γ^{ij}, tenseur symétrique d'ordre 2 au point x de W_3 peut être considéré comme un vecteur γ^I de l'espace de dimension 6 des tenseurs symétriques d'ordre 2 de W_3 en x. Sur cet espace, $M_{ij,\,rl}$ définira une forme quadratique dont nous désignerons les coefficients par M_{IJ}. La troisième des équations (4-31) s'écrit

$$||\dot{\underline{\gamma}}|| + \int_{W_3} M_{IJ}\gamma^I\gamma^J \, \mathrm{vol} = C_3.$$

On obtient le *Théorème.*

Étant donnée une métrique dont les coefficients $g_{\alpha\beta}$ vérifient les postulats de la relativité générale, ainsi que les deux hypothèses suivantes :

1) la métrique est statique au sens de Levi-Civita, g_{00} est constant;

2) $R_{il} + kg_{il}$, où k désigne une constante négative arbitraire, et M_{IJ} définissent deux formes quadratiques positives, l'équation

$$(\Delta + k)\underline{\gamma} = 0,$$

où Δ est le laplacien associé à la métrique $g_{\alpha\beta}$, $\underline{\gamma}$ un tenseur d'ordre 2, admet une solution nulle stable pour la norme

$$||\underline{\gamma}|| = ||u|| + ||V|| + ||\dot{\underline{\gamma}}||$$

($||u||$, $||V||$ et $||\dot{\underline{\gamma}}||$ sont définis par les équations (4-30)).

Généralisation. — (4-26) est formellement identique au système aux variations de la relativité générale dans le cas extérieur et

dans l'hypothèse où les coordonnées choisies vérifient la condition

$$Y_\alpha = 0.$$

Nous allons maintenant généraliser ce résultat au cas intérieur. Soient

$$(4\text{-}32) \qquad R_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(S + k)$$

où

$$(4\text{-}33) \quad S_{\alpha\beta} = \chi(\rho + p)u_\alpha u_\beta - \chi p g_{\alpha\beta}, \qquad S = \chi(\rho - 3p)$$

le système des équations d'Einstein. Nous supposerons encore $g_{00} = 1$ et $g_{0i} = 0$. Le système (3-8) et les équations (4-32) et (4-33) entraînent

$$(4\text{-}34) \quad \begin{cases} S_{0i} = \chi(\rho + p)u_0 u_i = 0, \\ S_{00} = \frac{1}{2}[\chi(\rho - 3p) + k] = \chi(\rho + p)(u_0)^2 - \chi p. \end{cases}$$

On a donc

$$u_i = 0$$

d'où

$$u^i = 0$$

(2-3) entraîne alors

$$u_0 = u^0 = 1$$

et la deuxième des équations (4-34)

$$(3\text{-}45) \qquad S_{00} = \chi\rho, \qquad k = \chi(\rho + 3p).$$

Enfin (3-8) et (4-32) entraînent aussi

$$R_{ij} = \dot{R}_{ij} = -\chi(\rho + p)g_{ij}.$$

Notons aussi que, dans un schéma matière pure, $p = 0$ et $k = \chi\rho$, ce qui prouve que ρ est constant. Dans un schéma fluide parfait, les deux équations (2-5) et (4-35) montrent que ρ et p sont des constantes.

Les hypothèses faites sont équivalentes à l'hypothèse suivante :

La métrique ds^2 définit un modèle d'univers stationnaire, à W_3 compacte, ou à comportement asymptotique euclidien, pour lequel les lignes de courant de la matière (supposée homogène et schématisée soit sous forme de fluide parfait, soit sous forme de matière pure) coïncident avec les lignes de temps.

On sait en effet qu'un tel modèle d'univers est partout statique au sens de Levi-Civita. L'équation (2-3) entraîne alors

$$u_0 = \xi, \qquad u^0 = \frac{1}{\xi}$$

(2-11), écrite pour $\alpha = i$, donne

$$\partial_i \xi = 0.$$

On peut donc supposer $\xi = 1$.

L'univers stationnaire étant ainsi choisi, les équations aux variations correspondantes sont, lorsqu'on suppose $Y_\alpha = 0$

$$\delta(R_{\alpha\beta}) = \delta(S_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\delta(g_{\alpha\beta})(S + k) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\delta S.$$

Elles s'écrivent, en tenant compte de (1-6), (4-12), (4-13), (4-14) et (4-33)

(4-36)

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}(\partial_{00}\gamma_{00} + \dot\nabla_l \dot\nabla^l \gamma_{00}) = \frac{1}{2}\chi(\rho_1 + 3p_1) + (\chi + p)(2v_0 - \gamma_{00}) \\ -\frac{1}{2}(\partial_{00}\gamma_{0l} + \dot\nabla_l \dot\nabla^l \gamma_{0l} - R_i{}^l \gamma_{0l}) = \chi(\rho + p)(v_i - \gamma_{0i}) \\ -\frac{1}{2}(\partial_{00}\gamma_{ij} + \dot\nabla_l \dot\nabla^l \gamma_{ij} + B_{ij,}{}^{rl}\gamma_{rl}) = \frac{1}{2}\chi(-\rho_1 + p_1)g_{ij} - \chi(\rho + p)\gamma_{ij} \end{cases}$$

(2-13) devient ici

(4-37) $$\gamma_{00} = 2v_0$$

(2-14) et (2-15) s'écrivent respectivement

$$r(\partial_0 v_0 + \dot\nabla_i v^i) + \partial_0 \rho_1 = 0$$

$$r\partial_0 v_i - \partial_i p_1 - \frac{1}{2} r\partial_i \gamma_{00} = 0.$$

On élimine v_i entre ces deux équations. Il vient

$$r\partial_{00} v_0 + \partial_{00}\rho_1 + \dot\nabla_i(\partial^i p_1) + \frac{1}{2} r\dot\nabla_i(\partial^i \gamma_{00}) = 0$$

et, d'après (4-37) et la première des équations (4-36)

(4-38) $$-r\left[\frac{1}{2}\chi(\rho_1 + 3p_1)\right] + \partial_{00}\rho_1 + \dot\nabla_i(\partial^i p_1) = 0.$$

Pour un schéma matière pure, $p_1 = 0$. Il reste donc

$$\partial_{00}\rho_1 - \left(\frac{1}{2}\chi\rho\right)\rho_1 = 0.$$

L'univers étudié est donc localement instable : le long d'une ligne de temps, si ρ_1 n'est pas identiquement nul, il n'est pas borné.

Pour un schéma fluide parfait, (4-38) devient

$$\varphi'(p)\,\partial_{00}p_1 + \dot{\nabla}_i(\partial^i p_1) - \frac{1}{2}\chi r(3 + \varphi'(p))\,p_1 = 0.$$

La solution nulle n'est pas stable non plus.

Ces deux résultats complètent les résultats déjà connus concernant l'instabilité de l'univers d'Einstein (qui appartient au type étudié).

BIBLIOGRAPHIE

Équations aux variations :

G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré*, Gauthier-Villars, 1878.

H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, 1892, 1893, 1899.

Calcul tensoriel et géométrie riemannienne :

L. Eisenhart, *Riemannian geometry*, Princeton, 1949.

A. Lichnérowicz, *Élément de calcul tensoriel*, A. Colin, 1951.

J. M. Souriau, *Calcul linéaire*, Presses universitaires de France, 1959.

Théories relativistes de la gravitation, théories unitaires, théories variationnelles :

A. Lichnérowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, 1955.

Y. Thiry, *Étude mathématique d'une théorie unitaire à 15 variables de champ*, Thèse, 1950.

J. M. Souriau, *Comptes rendus*, 244, 1957, p. 2779.

L. Bel, *Comptes rendus*, 246, 1958, p. 3015.

Stabilité des équations différentielles :

L. Césari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Berlin, Gottingen, Heidelberg Springer-Verlag, 1959.

A. Liapounoff, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Princeton University Press, 1949.

Problèmes cosmologiques :

A. Einstein, *Sur le problème cosmologique*, Gauthier-Villars, 1951.

G. C. MacVittie, *General relativity and cosmology*, Chapman and Hall, 1956.

R. C. Tolman, *Relativity thermodynamics and cosmology*, Oxford, Clarendon Press, 1950.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I. — *Les équations aux variations de la relativité générale dans le dans le cas extérieur* 7
Formation des équations 8
Influence d'un changement de variables 11
Problème de Cauchy 12

CHAPITRE II. — *Les équations aux variations de la relativité générale dans le cas intérieur* 16
Schéma matière pure et fluide parfait 17
Formation des équations 17
Problème de Cauchy 19
Prolongement local 24
Schéma champ électromagnétique 26
Champ E. M. voisin d'un champ E. M. singulier 27
Schéma matière pure — champ électromagnétique 37

CHAPITRE III. — *Les équations aux variations de la relativité générale associées à un espace temps stationnaire* 41
Espace-temps Riemannien stationnaire 41
Variation du tenseur d'Einstein lorsque la métrique (1) est stationnaire 47
Singularités du champ de gravitation à l'intérieur des masses 59

CHAPITRE IV. — *Théorème de conservation* 64
Stabilité des univers quasi-stationnaires 75

BIBLIOGRAPHIE 86

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Algèbres commutatives dans un espace de Banach.

Vu :
Le Président du Jury de la thèse :
R. CAMPBELL

Vu : *Le Doyen*
N. LOZAC'H

Vu et permis d'imprimer
Caen, le 22 juin 1961,
Le Recteur,
Président du Conseil d'Université.
P. DAURE

ACHEVÉ D'IMPRIMER
SUR LES PRESSES DE
L'IMPRIMERIE DURAND
A CHARTRES
LE 20 6-1962

PAPIER OFFSET BLANC VII/1
DES PAPETERIES DE FRANCE

DÉPÔT LÉGAL : 2e TRIMESTRE 1962.
N° 3792.